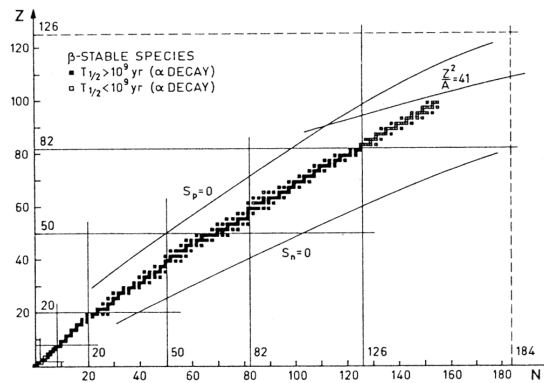


2 原子核の質量公式 (nuclear mass formula)

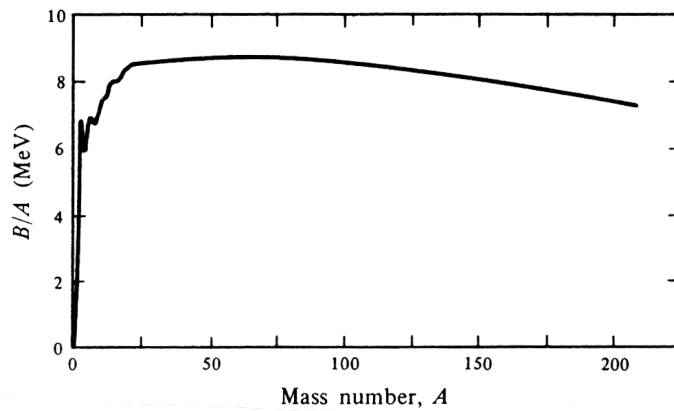
(Bethe-Weizsäcker の質量公式)

説明したい現象が2つある (第1章に参照) :

(1) 核図表 ($N - Z$ 平面) での安定な原子核の谷 :



(2) 安定な原子核の束縛エネルギー (核子 1 個あたり) B/A :



それを説明するために、Bethe と Weizsäcker が次の「質量公式」を提案した¹ (以下では $A = Z + N$):

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \quad (2.1)$$

それぞれの項の意味：

1. $a_v A$... 「体積の項」

原子核の体積 $V \propto A$. 核力は短距離の力なので、原子核の束縛エネルギーは A と比例する。(第1章に参照。) ただし、そのときは原子核の表面、クーロン力などの影響は考えていない。

2. $a_s A^{\frac{2}{3}}$... 「表面の項」

原子核の表面積 $S \propto R^2 \propto A^{\frac{2}{3}}$. 表面上の核子の相互作用相手は少ない \Rightarrow 束縛エネルギーは $a_v A$ よりも小さくなる。その効果は、原子核の表面積に比例する。

液滴と同様に、この効果を「表面張力」 σ を使って表すこともできる：

$$a_s A^{2/3} = (4\pi R^2)\sigma \quad (\Rightarrow a_s = 4\pi r_0^2 \sigma)$$

3. $a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$... 「クーロン項」

陽子間の斥力のため、束縛エネルギーが減る。

簡単な評価：電荷 $-Ze > 0$ は半径 R の球のなかに一様に分布している場合、その球のクーロンエネルギーは電子気学の公式により

$$E_c = \frac{3(Ze)^2}{5 R} = \frac{3e^2 Z^2}{5 r_0 A^{\frac{1}{3}}} \quad (2.2)$$

¹第1章の「原子核の半径」についての公式を思い出して下さい： $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ ($r_0 = 1.1$ fm).

従って、 a_c は次のようになる：

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{3e^2}{5r_0} = \frac{3}{5} \times \frac{\hbar c[\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{137} \times \frac{1}{1.1[\text{fm}]} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{197}{137} \times \frac{1}{1.1} [\text{MeV}] = 0.8 [\text{MeV}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. $a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \dots$ 「対称の項」

$N \neq Z$ の原子核の束縛エネルギーは $N = Z$ の場合よりも小さい。その理由は Pauli の排他率にあり、後で詳しく勉強するが、ここでその結果だけ述べることにする：

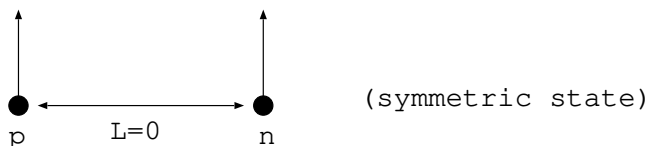
- 核子当たりの運動エネルギーは増加する：フェルミ気体模型では、その増加は $\frac{1}{3} E_F \frac{(N-Z)^2}{A}$ 。

ただし、 $E_F \simeq 40 \text{ MeV}$ は フェルミエネルギー (核子の最大の運動エネルギー) である。

従って、運動エネルギーの寄与は次のようになる：

$$(a_s)_{\text{kin}} = \frac{1}{3} E_F \simeq \frac{40}{3} \text{ MeV} \simeq 13 \text{ MeV}$$

- 原子核中の陽子・中性子 (pn) 間の相互作用は平均的に、 pp , nn よりも強い。[その理由： pn の場合は Pauli の排他率は働かないので、粒子の入れ換えに対して対称な状態 (symmetric state) も存在する：相対起動角運動量 $L = 0$, 合成スピン $S = 1$ (スピンは平行、重陽子の状態)。



Pauli の排他律のため、その状態は同種粒子 pp , nn の場合存在しない。

相互作用の寄与は運動エネルギーの寄与と同じ程度である：

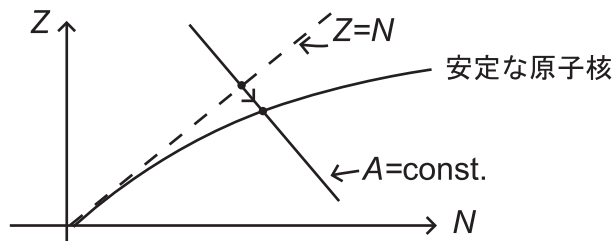
$$(a_s)_{\text{pot}} \simeq (a_s)_{\text{kin}}$$

次の値を使って、安定な原子核の束縛エネルギーはよく再現できる：

$$\begin{aligned} a_v &= 15.6\text{MeV}, & a_s &= 17.2\text{MeV} \\ a_c &= 0.7\text{MeV}, & a_a &= 23.6\text{MeV} \end{aligned}$$

次に、安定な原子核に対する Z と N との関係について調べる： A を固定すると、一番安定な原子核の束縛エネルギーは最大であるので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial Z}\right)_A &= -\frac{2a_c Z}{A^{1/3}} + \frac{4a_a(A-2Z)}{A} = 0 & (2.4) \\ \Rightarrow a_c Z A^{2/3} &= 2a_a(A-2Z) \\ \Rightarrow Z(a_c A^{2/3} + 4a_a) &= 2a_a A \end{aligned}$$



従って、一番安定な原子核の場合、

$$Z = \frac{A/2}{1 + \frac{a_c}{4a_a} A^{2/3}} = \frac{A/2}{1 + 0.008A^{2/3}} \quad (2.5)$$

原子核の安定性は、クーロンエネルギーと対称エネルギーとの競争で決まる：対称エネルギーは $Z = A/2$ を優先するが、クーロンエ

エネルギーは $Z = 0$ を優先する。

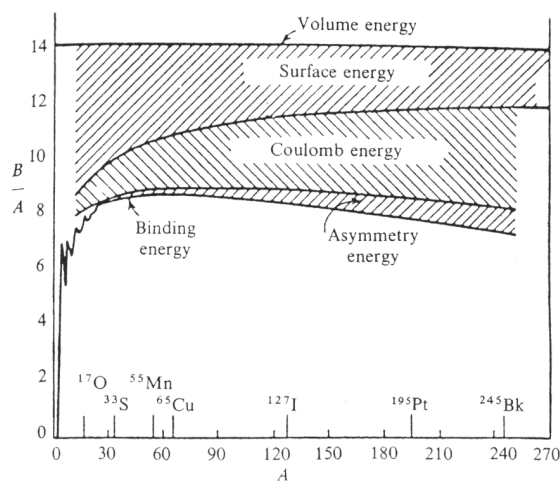
($a_c = 0 \rightarrow Z = A/2$, $a_a = 0 \rightarrow Z = 0$.)

安定な原子核の谷：(2.5) 式に $A = Z + N$ を代入すると、谷の方程式 $Z = Z(N)$ は求めることができる。

また、(2.5) 式を質量公式 (2.1) に代入すると、安定な原子核の束縛エネルギー $B(A)$ を求めることができる：

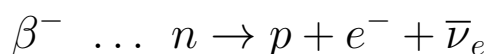
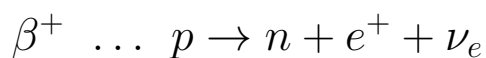
$$\frac{B(A)}{A} = a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_c \frac{1}{4} \left(\frac{A^{\frac{1}{3}}}{1 + \alpha A^{\frac{2}{3}}} \right)^2 - a_a \alpha^2 \left(\frac{A^{\frac{2}{3}}}{1 + \alpha A^{\frac{2}{3}}} \right)^2$$

($\alpha = 0.008$).



安定条件 (2.4) を満たさない原子核は、 β 崩壊を経由し、安定な原子核へ変わる。

β^+ 崩壊: 陽子は中性子へ変わる。 β^- 崩壊: 中性子は陽子へ変わる。



単独の中性子は陽子へ崩壊し (寿命は ≈ 10 min)、単独の陽子は安定である。

原子核中の中性子は陽子へ変わるかどうか、原子核の質量が減るかどうかで決まる。(原子核中の陽子も同様。) 例えば、 $A = 135$ の場合は $Z = 56$ ($N = 79$) の原子核は最小限の質量を持つので、他の原子核はその方向へ β 崩壊をする。

