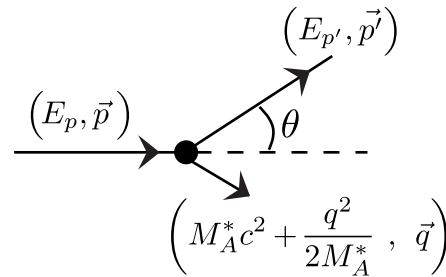


3 原子核と電子との散乱 (scattering) について

原子核の大きさ、励起エネルギーなどは散乱実験データの解析から分かる。

エネルギー $E_p = p^2/2m$, 運動量 \vec{p} の電子を静止している原子核 (質量 M_A) に当てる。



散乱後の電子の運動量 \vec{p}' を測定すると、原子核へ移行された運動量 $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ が分かる (運動量の保存則)。

エネルギーの保存則 :

散乱後の原子核の質量を M_A^* とする。ただし、 $M_A^* = M_A$ は弾性散乱 (原子核の励起エネルギーはゼロ) に対応し、 $M_A^* > M_A$ は非弾性散乱 に対応し、その場合は原子核の励起エネルギーは $(M_A^* - M_A)c^2 \equiv \Delta E_A$ である。

$$E_p + M_A c^2 = E_{p'} + M_A^* c^2 + \frac{q^2}{2M_A}$$

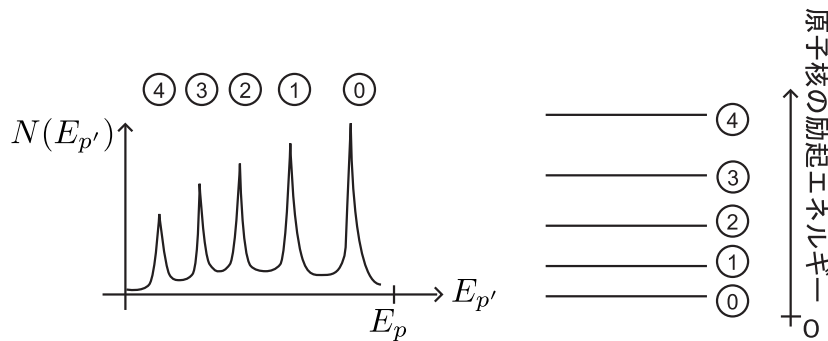
ただし、原子核の可能な励起エネルギー $\Delta E_A \simeq \text{several MeV}$, 原子核の質量によるエネルギー $M_A c^2 \simeq \text{several GeV}$ なので $\Delta E_A \ll M_A c^2$ が成り立つので、近似式 $\frac{q^2}{2M_A^*} = \frac{q^2}{2(M_A + \Delta E_A/c^2)} \simeq \frac{q^2}{2M_A}$ を使った。

基本的に次の2種類の散乱実験がある :

1) 電子の散乱角度 θ を固定し p' を測定する \Rightarrow 原子核の励起エネルギーが分かる。上式から

$$\Delta E_A \simeq E_p - E_{p'} - \frac{q^2}{2M_A} \quad (q^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)$$

実際の散乱実験で、エネルギー E_p の電子ビームを入射させ、角度 θ で検出器 (detector) を置き、エネルギー $E_{p'}$ をもつ電子の数 $N(E_{p'})$ を記録する。観測の結果が幾つかの離散的なピーク (peak) を示している：

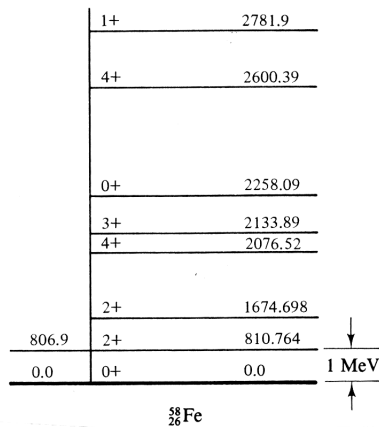


「0」は弾性散乱に対応し、「1,2,3, ...」は第1、第2、第3... 励起状態への非弾性散乱に対応する。

結論: この実験から原子核の励起エネルギー順位が分かる。

具体例： ^{58}Fe のエネルギー順位¹

¹この図では、励起エネルギーを keV の単位で表し、更に各状態のスピンおよび parity ($2^+, 4^+$ など) も示している。



2) 一つの peak に着目し、検出器を動かすことにより散乱角度 θ を変数とする。例えば、弾性散乱の peak に着目すると、上式では $\Delta E_A = 0$ をおくと

$$E_{p'} = E_p - \frac{q^2}{2M_A} \Leftrightarrow p' = p'(\Theta)$$

を満たす電子のみをカウントする。時間当たり測定された電子の数を θ の関数として記録する ($N_{\text{out}}(\theta)$)。

普通は $N_{\text{out}}(\theta)$ よりも断面積 $\sigma(\theta)$ を使って実験データを表すことが多い。断面積の定義は次の通り：

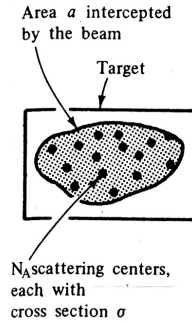
$$\sigma(\theta) = \frac{N_{\text{out}}(\theta)}{N_A F_{\text{in}}} \quad (3.1)$$

ただし、 F_{in} は時間当たり面積当たり入射電子の数 (Flux, 単位は $1/(\text{cm}^2 \text{s})$), N_A は入射ビームが照らす標的中の原子核の数。従って、 $\sigma(\theta)$ の単位は cm^2 (面積) である。

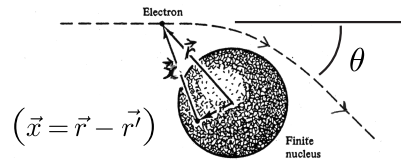
入射電子の流れは $F_{\text{in}} = N_{\text{in}}/a$ ($a =$ 電子ビームの幾何学的断面積) であるので、(3.1) から

$$\frac{N_{\text{out}}(\Theta)}{N_{\text{in}}} = N_A \frac{\sigma(\Theta)}{a}$$

従って、 $\sigma(\theta)$ は標的中の原子核 1 個当たりの「有効面積」であり、電子との相互作用の強さの尺度として考えることができる：



一方、理論計算から $\sigma(\theta)$ を求めると、実験との比較で原子核の電荷分布および電荷半径が分かる。この理論計算は後で紹介するが、ここで結果だけ簡単にまとめる：



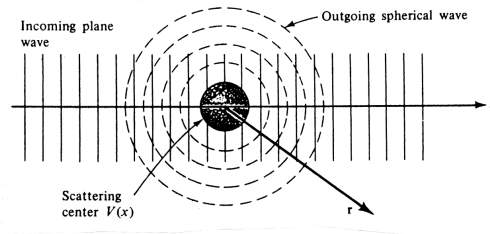
電子と原子核の間に働くポテンシャルが次のクーロンポテンシャルである：

$$V(\vec{r}) = -e \int d^3r' \frac{\rho_A(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.2)$$

ただし、 $\rho_A(\vec{r})$ は原子核の電荷分布であり、規格化条件 $\int d^3r \rho_A(\vec{r}) = Z$ を満たす。電子の Schrödinger 方程式は次の通りである：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.3)$$

($E = \frac{p^2}{2m}$ は入射電子のエネルギーである。) この Schrödinger 方程式を Green 関数の方法 を使って解ける (後で詳しく勉強する)。原子核から十分に離れた場合 ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$)、電子の波動関数 $\psi(\vec{r})$ は「入射の平面波」 + 「散乱の球面波」となる：



$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar} + f(\theta) \frac{e^{i\pi r / \hbar}}{r}$$

$f(\theta)$ は「散乱振幅」と呼ばれ、Schrödinger 方程式から次のように計算できる：

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar} V(\vec{r}) \quad (3.4)$$

($\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$.)

即ち、散乱振幅は クーロンポテンシャル Fourier 変換 である。結局、理論計算で求めた断面積 $\sigma(\theta)$ は次のようになる：

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (3.5)$$

式 (3.2) を (3.20) に代入すると、散乱振幅は次のようになる：

$$f(\theta) = \frac{m e}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar} \int d^3r' \frac{\rho_A(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

変数変換： $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$ ($\vec{r} = \vec{x} + \vec{r}'$) を使うと、

$$f(\theta) = \frac{m e}{2\pi\hbar^2} \int d^3x \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{x} / \hbar}}{x} \int d^3r' \rho_A(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}' / \hbar}$$

ここでクーロンポテンシャルの Fourier 変換

$$\int d^3x \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}}{x} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2}$$

を使うと、散乱振幅は次のようになる：

$$f(\theta) = \frac{2m(Ze^2)}{q^2} \cdot F_A(q^2)$$

但し、原子核の「形状因子」は電荷密度の Fourier 変換で定義される：

$$F_A(q^2) = \frac{1}{Ze} \int d^3r \rho_A(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

結局、断面積 (3.5) は次のようになる：

$$\sigma(\Theta) = \sigma_{\text{Ruth}} \cdot |F_A(q^2)|^2$$

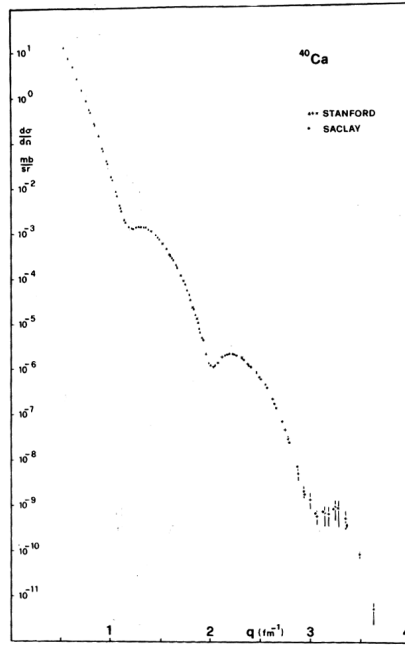
但し、Rutherford の断面積は

$$\sigma_{\text{Ruth}} = \frac{4m^2(Ze^2)^2}{q^4} = \frac{m^2 Z^2 e^4}{4p^4 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

($q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ を使った.) 原子核は点電荷と見なした場合、 $F_A(q^2) = 1$ となる。従って、原子核の広がり効果が「形状因子」で表される。

結論：電子・原子核散乱の断面積の実験データから原子核の電荷分布が分る。

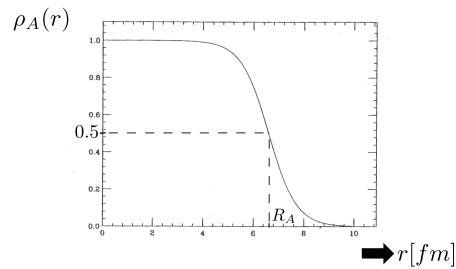
実験データの例： $E_p = 500$ MeV の電子ビームを ^{40}Ca に散乱された場合の断面積のデータ。次の図では、縦軸は $\sigma(\theta)$ を millibarn の単位 (1 millibarn = 10^{-27} cm²), 横軸は $\frac{q}{\hbar} = 2\frac{p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}$ を fm⁻¹ の単位で示している。(散乱角度 10° と 100° の間の値に対応する。)



このように色々な原子核について解析すると、次の電荷分布が実験データをよく再現できることが分かる：

$$\rho_A(r) = \frac{N}{1 + e^{\frac{(r-R_A)}{c}}}$$

(“Fermi 型分布”). N は規格化定数である。



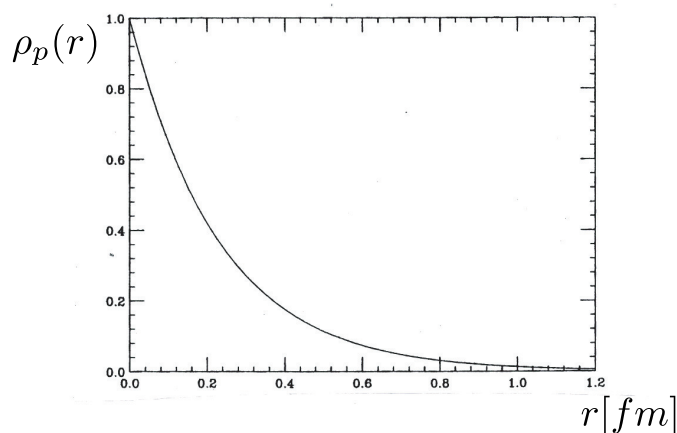
ただし、

$$R_A = 1.1 A^{1/3} \text{ [fm] (nuclear radius)}$$

$$t \equiv 4(\ln 3)c \simeq 2 \text{ fm (surface thickness)}$$

十分に重い原子核の電荷分布は、中心付近でほぼ一定、表面付近でゼロに減少する。

同様に、目標粒子として 陽子 を使い、同じ散乱実験を行う \Rightarrow 陽子の電荷密度 $\rho_p(r)$ が分かる。



陽子は u クォークと d クォークから成る \Rightarrow 電荷密度 $\rho_p(r)$ は陽子内のクォークの確率分布を反映する。即ち、陽子内のクォークの運動について学ぶことができる。

この電荷分布を式で表すと、指数型関数 (exponential) となる：

$$\rho_p(r) = \rho_0 e^{-r/a}$$

(ただし、 $\int d^3r \rho_p(r) = 1$ とする。) 従って、陽子の場合「表面」ははっきり現れないが、「半径」を次のように定義できる：

$$r_{\text{rms}} \equiv \left[\int d^3r r^2 \rho_p(r) \right]^{1/2}$$

即ち、 r^2 の平均値を計算し、その平方根をとえる。 (“root mean square radius” = rms radius.) 実験からの結果は、 $r_{\text{rms}} = 0.86 \text{ fm}$ が分かる。

追加説明 (I): Green 関数について

(1) 演算子 $(\Delta + k^2)$ の Green 関数 $G(\vec{r} - \vec{r}')$ が次式で定義される :

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.6)$$

ここで $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ は 3次元の delta 関数であり、任意の関数 f を使って次のように定義されている :

$$\int d^3r' f(\vec{r}')\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r}) \quad (3.7)$$

(3.6) を解くために、両面を次のように Fourier 変換する :

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} G(q) \quad (3.8)$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \quad (3.9)$$

それを式 (3.6) に代入すれば、関数 $G(q)$ が決まる :

$$(-q^2 + k^2) G(q) = -4\pi \Rightarrow G(q) = \frac{4\pi}{q^2 - k^2} \quad (3.10)$$

その結果を (3.8) に代入すると Green 関数を次のように計算できる ($\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$):

$$G(x) = 4\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{1}{q^2 - k^2} \quad (3.11)$$

積分を極座標を使って実行する。ただし、ベクトル \vec{x} は z 方向にとり、 $\cos\theta \equiv \eta$ にする :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d\eta \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqx\eta}}{q^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{2\pi ix} \int_{-\infty}^\infty q dq \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

積分関数が $q = \pm k$ で極 (pole) をもつ。結果が「原点から発生する球面波」になるために、積分関数を次のように定義すればよい：

$$\frac{1}{q^2 - k^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon'} = \frac{1}{(q - k - i\epsilon)(q + k + i\epsilon)} \quad (3.13)$$

($\epsilon' = 2k\epsilon = 0^+$.) 積分 (3.12) を計算するために、複素数関数論で勉強した「留数定理」(theorem of residues) を使う： e^{iqx} の項の場合、積分経路を上半面で閉じる。 e^{-iqx} の項の場合、積分経路を下半面で閉じる。計算の結果が次のようになる：

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i x} 2\pi i e^{ikx} = \frac{e^{ikx}}{x} \quad (3.14)$$

(2) 解きたい Schrödinger 方程式 (3.3) は次のように書き換える：

$$(\Delta + k^2) \psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \psi(\vec{r}) \quad (3.15)$$

ただし $E = p^2/2m = (\hbar k)^2/2m$ は入射電子のエネルギーである。Green 関数 $G(\vec{r} - \vec{r}')$ を使って、Schrödinger 方程式の特殊解を次のように書ける：

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') V(r') \psi(\vec{r}') \\ &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} V(r') \psi(\vec{r}') \end{aligned} \quad (3.16)$$

式 (3.16) が (3.15) を満たしていることが簡単に確認できる²。次に (3.16) で $r = |\vec{r}| \rightarrow \infty$ の極限をとる：

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + r'^2} = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &\rightarrow r \left(1 - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} + \mathcal{O}(1/r^2) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

²式 (3.16) に演算子 $(\Delta + k^2)$ を作用させ、Green 関数が満たしている方程式 (3.6) を使えば確認できる。

ただし Taylor 展開 $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \alpha/2 + \dots$ を使った。式 (3.17) を (3.16) に代入すると

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-ik\vec{r}'\cdot\vec{r}/r} V(r')\psi(\vec{r}') \quad (3.18)$$

になる。散乱振幅 $f(\theta)$ の定義式と比較すると、

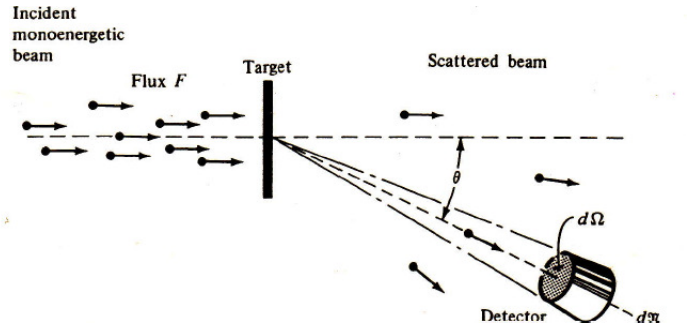
$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(r')\psi(\vec{r}') \quad (3.19)$$

ただし $\vec{k}' = k\hat{r}$ を定義した。 $(\hat{r}$ は観測方向への単位ベクトル。) ここで「1次摂動論」を使って散乱振幅を求める。(3.19) 式の右辺の波動関数 $\psi(\vec{r}')$ を式 (3.18) 右辺の第1項 (平面波) に置き換える:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(r') + \mathcal{O}(V^2) \quad (3.20)$$

ただし、 $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ は入射電子からの運動量移行である。従って、この「第1 Born 近似」では、散乱振幅がポテンシャルの Fourier 変換である。

追加説明 (2): 散乱の断面積



ここで、標的中の原子核1個当たりの断面積の定義を思い出す：
 $\sigma(\theta) = (\text{時間当たり立体角当たりへ散乱される電子の数}) / (\text{時間当たり面積当たり入射電子の数})$.

電子の流れ (\vec{j}) を使って次のように表すことができる (測定器の面積 $ds = r^2 d\Omega$ に注意):

$\sigma(\theta) = (\text{散乱される電子の流れ} \times r^2) / (\text{入射電子の流れ})$.

ここで量子力学から、電子の流れベクトル \vec{j} の公式を思い出す：

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

波動関数が (3.18) で与えられるので、流れを次のように計算できる：

- 散乱される電子の流れ: ψ として式 (3.18) の第2項 (散乱波) を使って、同型方向 (\hat{r} 方向) の成分は

$$j_r^{\text{out}} = \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\theta)|^2 \quad (3.21)$$

- 入射電子の流れ (z 成分):

$$j_z^{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m} \quad (3.22)$$

それを上式の断面積に代入すれば

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (3.23)$$

となる。従って、散乱振幅 $f(\theta)$ が理論と実験の接点であり、大変重要な物理量である。