

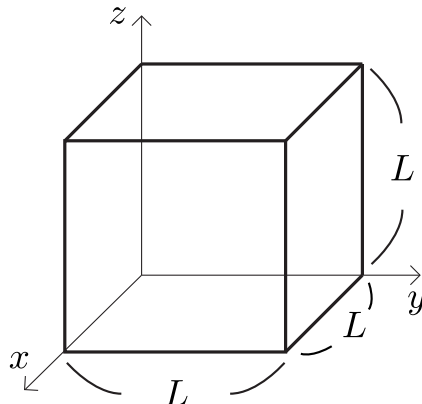
4 原子核 (核物質) のフェルミ気体模型

フェルミ気体 (Fermi gas)の意味について：

- フェルミオン (Fermion) とは、ここはスピン $\frac{\hbar}{2}$ の粒子を考える。従って、Pauli の排他律を考慮しなければならない。
- 気体とは、無限に広がっている多体系であり、相互作用の影響は十分弱いと考えられる。
- 従って、フェルミ気体模型は、核物質(重い原子核の中の物質)についての模型である。相互作用の影響は先ず無視できるとして、後で摂動論などの近似方法で取り入れる。

核物質の他に、金属中の自由電子、超電導状態などもフェルミ気体模型で考えることが多い。

ここで陽子 (Z 個)と中性子 (N 個)、一定の平均ポテンシャル ($V < 0$) の中を独立 (自由に) 運動すると考える。便利上で先ず箱 (体積 $V = L^3$) に核子をつめるが、具体的な計算を行う時は核子数 $Z, N \rightarrow \infty$, 体積 $V \rightarrow \infty$ とする。但し、粒子密度 $\rho_p \equiv \frac{Z}{V}$, $\rho_n \equiv \frac{N}{V}$ は固定した値となるように極限をとる。



箱中の核子一個の Schrödinger 方程式：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V \right) \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) \quad (4.1)$$

ただし、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は Laplace 演算子である。(4.1) の解は平面波である：

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = e^{ip_x x/\hbar} \cdot e^{ip_y y/\hbar} \cdot e^{ip_z z/\hbar} \equiv \phi(x) \cdot \phi(y) \cdot \phi(z) \\ \epsilon &= \frac{\vec{p}^2}{2M} + V \end{aligned}$$

ただし $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は核子の運動量である。

箱の壁のところに周期的な境界条件をつける：

$$\begin{aligned} \psi(x=0, y, z) &= \psi(x=L, y, z) \\ \psi(x, y=0, z) &= \psi(x, y=L, z) \\ \psi(x, y, z=0) &= \psi(x, y, z=L) \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} \phi(x=0) &= \phi(x=L) \Rightarrow e^{ip_x L/\hbar} = 1 \\ &\Rightarrow p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x \quad (n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.2)$$

p_y, p_z についても同様なので、箱中の核子の運動量は次のような離散的な値をとる：

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} \vec{n} \quad [\vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots] \quad (4.3)$$

「周期的な境界条件」の意味について：箱の表面は物理系の表面ではなく、箱は沢山並べても同様な物理系となるための条件である。(並進対称性を守るための条件。)従って、箱の境界で粒子の

波動関数は飛びなし、隣の箱へ連続的につながる。

箱の中を独立に運動する核子をつめるが、Pauli の排他律を考慮をしなければならない：同じ運動量 \vec{p} をもつ陽子の数はせいぜい 2 個。(1個はスピン上向き、1個はスピン下向き。) 中性子も同様。

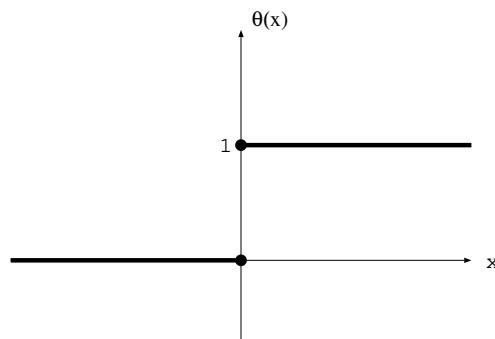
フェルミ気体の基底状態： $p = 0$ から最大の運動量までに、 \vec{p} 毎に陽子 2 個、中性子 2 個をつめる。

最大の運動量はフェルミ運動量 (Fermi momentum) と呼ぶ。陽子数は Z , 中性子数は N となるように、陽子のフェルミ運動量 p_F^p , 中性子のフェルミ運動量 p_F^n を決定する。式で表すと、その条件は次のようになる：

$$Z = 2 \sum_{\vec{p}} \theta(p_F^p - |\vec{p}|) \quad (4.4)$$

$$N = 2 \sum_{\vec{p}} \theta(p_F^n - |\vec{p}|) \quad (4.5)$$

ただし、 $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}$ ($\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) であり、 $\theta(x)$ は「階段関数」で、 $\theta(x) = 1$ (if $x > 0$), $\theta(x) = 0$ (if $x < 0$) で定義されている。



従って、式 (4.4) の右辺は、 $|\vec{p}| < p_F^p$ の条件を満たすベクトル \vec{p} の

数の2倍であり、その結果が Z となるように陽子のフェルミ運動量 p_F^p が決まる。

ここで、「熱力学的極限」を使って (4.4), (4.5) 式の和を次のように計算する：

- dn_x は、整数 n_x 同士の間隔として定義する。(勿論、 $dn_x = 1$ である。) 同様に dn_y, dn_z を定義する。式 (4.4) は次のように書ける：

$$Z = 2 \sum_{\vec{p}} dn_x dn_y dn_z \theta(p_F^p - |\vec{p}|) \quad (4.6)$$

- 次に、式 (4.2) を使うと、運動量の間隔 dp_x は

$$dp_x = \frac{2\pi\hbar}{L} dn_x \quad (4.7)$$

となる。(dp_y, dp_z も同様。) 従って、式 (4.6) は次のようになる：

$$Z = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\vec{p}} dp_x dp_y dp_z \theta(p_F^p - |\vec{p}|) \quad (4.8)$$

- 最後に、体積 $V \rightarrow \infty$ ($L \rightarrow \infty$) の場合は、式 (4.7) から運動量の間隔はゼロとなることがわかる。定積分の定義通り、式 (4.8) は

$$Z = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \theta(p_F^p - |\vec{p}|) \quad (4.9)$$

となる。同様に

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \theta(p_F^n - |\vec{p}|) \quad (4.10)$$

積分 (4.9), (4.10) を極座標系を使って実行すると、次のようになる :

$$Z = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \theta(p_F^p - |\vec{p}|) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi(p_F^p)^3}{3} = \frac{V(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \theta(p_F^n - |\vec{p}|) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi(p_F^n)^3}{3} = \frac{V(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

従って、陽子の密度 (ρ_p), 中性子の密度 (ρ_n) および全核子の密度 (ρ) は次のようになる :

$$\rho_p = \frac{Z}{V} = \frac{(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

$$\rho_n = \frac{N}{V} = \frac{(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

$$\rho = \rho_p + \rho_n \quad (4.11)$$

積分 (4.9), (4.10) の解釈 : $2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p$ (無次元の数) は、体積 V および運動量空間 d^3p 中の陽子(および中性子)の状態の数である。ファクター 2 は「スピンの縮重度」である。

これから、 $Z = N$ の場合 (symmetric nuclear matter) と $Z \neq N$ の場合 (asymmetric nuclear matter) を区別する。

1.) $Z = N = \frac{A}{2}$ (symmetric nuclear matter)

陽子と中性子のフェルミ運動量は等しい : $p_F^p = p_F^n \equiv p_F$.

重い原子核の中心密度 $\rho = \frac{A}{V} = 0.17 \text{ nucleons/fm}^3$ を再現するように

フェルミ運動量 p_F を決定する：

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{2p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = 0.17 \text{ fm}^{-3} \\ (p_{FC})^3 &= \frac{3\pi^2}{2}(\hbar c)^3 [\text{MeV}^3 \text{ fm}^3] \times 0.17 \text{ fm}^{-3} \\ &= \frac{3\pi^2}{2}(197)^3 \times 0.17 \text{ MeV}^3 \\ (p_{FC}) &= 270 \text{ MeV}\end{aligned}$$

フェルミ速度 (最高速度) :

$$v_F = \frac{p_F}{M} \Rightarrow \frac{v_F}{c} = \frac{p_{FC}}{Mc^2} = \frac{270}{940} = 0.29$$

フェルミエネルギー (最高運動エネルギー) :

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} = \frac{(p_{FC})^2}{2Mc^2} = \frac{(270)^2}{2 \times 940} \text{ MeV} = 39 \text{ MeV}$$

次に、全運動エネルギーを計算する：

$$\begin{aligned}E_{\text{kin}} &= 2 \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^p - |\vec{p}|) + 2 \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^n - |\vec{p}|) \\ &= 4V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F - p) = \frac{V p_F^5}{5\pi^2\hbar^3 M} \\ &= E_F \cdot \frac{2p_F^3}{5\pi^2\hbar^3} \cdot V = E_F \cdot \frac{3}{5} \rho V = \frac{3}{5} E_F \cdot A\end{aligned}$$

核子当たりの運動エネルギー：

$$E_{\text{kin}}/A = \frac{3}{5} E_F = 23 \text{ MeV}$$

従って、核子当たりの全エネルギーは $E/A = 23 \text{ MeV} + V$ となり、それは質量公式の「体積エネルギー」 $-a_v = -16 \text{ MeV}$ と同じなるために、核子のポテンシャルエネルギーが $V = -39 \text{ MeV}$ となる。

2.) $Z \neq N$ (asymmetric nuclear matter)

式 (4.11) を思い出す :

$$\begin{aligned}\rho_p &= \frac{Z}{V} = \frac{(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3} \\ \rho_n &= \frac{N}{V} = \frac{(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}\end{aligned}\quad (4.12)$$

ここで、核子当りの運動エネルギーを計算し、対称核物質の値 (23 MeV) と比べて見る。極座標系を使って、

$$\begin{aligned}E_{\text{kin}} &= 2 \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^p - |\vec{p}|) + 2 \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^n - |\vec{p}|) \\ &= 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^p - p) + 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2M} \theta(p_F^n - p) \\ &= \frac{V}{10\pi^2\hbar^3 M} ((p_F^p)^5 + (p_F^n)^5)\end{aligned}$$

ここで式 (4.12) を使うと、 $(p_F^p)^5$ を次のように表すことができる :

$$(p_F^p)^5 = \left(\frac{3\pi^2\hbar^3}{2} \frac{2Z}{A} \right)^{5/3} \frac{A^{5/3}}{V^{5/3}}$$

中性子についても同様にして、核子当たりの運動エネルギーは次のようになる :

$$\begin{aligned}E_{\text{kin}}/A &= \frac{1}{10\pi^2\hbar^3 M} \left(\frac{A}{V} \right)^{2/3} \left(\frac{3\pi^2\hbar^3}{2} \right)^{5/3} \left(\left(\frac{2Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{2N}{A} \right)^{5/3} \right) \\ &= \frac{3}{20M} \left(\frac{A}{V} \frac{3\pi^2\hbar^3}{2} \right)^{2/3} \left(\left(\frac{2Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{2N}{A} \right)^{5/3} \right)\end{aligned}$$

ここで、平均のフェルミ運動量 p_F を以前と同じように定義する :

$$\frac{A}{V} \equiv \frac{2p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

(即ち $(p_F^p)^3 + (p_F^n)^3 \equiv 2p_F^3$.) $E_F \equiv \frac{p_F^2}{2M}$ で定義したので、上式は次のようになる：

$$E_{\text{kin}}/A = \frac{3}{10} E_F \left[\left(\frac{2Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{2N}{A} \right)^{5/3} \right]$$

また、それを全核子数 A と「中性子の過剰」(neutron excess) ϵ で表す：

$$A = N + Z$$

$$\epsilon = N - Z$$

結局、核子当たりの運動エネルギーは次のようになる：

$$\frac{E_{\text{kin}}}{A} = \frac{3}{5} E_F \cdot \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{A} \right)^{5/3} + \left(1 + \frac{\epsilon}{A} \right)^{5/3} \right]$$

この式から、 $A = Z + N$ を固定したときに、 $N = Z$ の運動エネルギーが最小であることが分かる。

質量公式の「対称エネルギー」の項と比較するために、 $\epsilon/A \ll 1$ を考え、上式を $x \equiv \epsilon/A$ について Taylor 展開する：

$$\frac{1}{2} \left[(1+x)^{5/3} + (1-x)^{5/3} \right] = 1 + \frac{5}{9} x^2 + \dots$$

そのときに、

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}}{A} &= \frac{3}{5} E_F \left(1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\epsilon}{A} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{3}{5} E_F + \frac{1}{3} E_F \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

質量公式と比較すると、「対称エネルギー」の項は次のようになる：

$$(a_a)_{\text{kin}} = \frac{E_F}{3} = \frac{39}{3} \text{ MeV} = 13 \text{ MeV}$$

ただし、これは運動エネルギーのみの寄与である。経験的な値いは $a_a = 23.6 \text{ MeV}$ なので、核力からの寄与は $(a_a)_{\text{pot}} = 10.6 \text{ MeV}$ となるが、この部分を定量的に説明するためにフェルミ気体模型は不十分である。

核力の寄与の定性的な説明：(np) 間の核力は、(pp) および (nn) よりも平均的に強い。何故ならば、(np) について Pauli の排他律は効かないので、状態数の方が多い。 $A = Z + N$ を固定したときに、 $N = Z$ の場合は (pn) pair の数は最も多いので、核力は最も強く作用する。従って、核力も（運動エネルギーと同様に）対称エネルギーの項 (a_a) に生の寄与をする。