

5 原子核のスピンおよび核力のスピン依存性

講義「原子物理学」では量子力学における角運動量について詳しく勉強した。ここでは要点だけ復習する。

量子力学では、角運動量 (\vec{J}) の大きさおよび方向は離散的な値いしかとれない。大きさは次の通り：

$$J = 0, \frac{\hbar}{2}, \hbar, \frac{3}{2}\hbar, 2\hbar, \dots$$

ただし $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. 古典力学の極限では Planck 定数はゼロ ($h \rightarrow 0$) となるので、古典力学では角運動量の値いは連続的になる。

角運動量の向きについて、任意の軸 (ここで z 軸とする) に対する一つの成分しか決まらないが、その成分の可能な値いは次の通り：

$$J_z = J, J - \hbar, J - 2\hbar, \dots - J \quad (2J + 1 \text{ possible values}).$$

他の成分 (J_x, J_y) について不確定性がある¹。

一般に、粒子がある基準点に対する 軌道角運動量 ($\vec{\ell}$) をもつとき、その大きさは \hbar の整数倍である：

$$\ell = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$$

粒子の スピン (自己角運動量 (\vec{s})) の大きさについて、

$$\text{Boson} : s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots \quad \text{Fermion} : s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$$

例えば、電子、核子のスピンは $s = \frac{1}{2}\hbar$ で、可能な向きは2通り：

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \downarrow \\ S_z = +\frac{\hbar}{2} & S_z = -\frac{\hbar}{2} \end{array}$$

¹ 「原子物理学」講義では、角運動量の交換関係を求めた。例えば $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$ なので、演算子 J_z, J_x は可換ではないので、ある状態は J_z の固有状態 (J_z の固有値が存在する) ときに、同時に J_x の固有状態になることができない。その場合は、 J_x の固有値は存在しないが、 J_x の期待値しか分からない。よって不確定性が生じる。

原子核の中の核子は、自分のスピン $s = \frac{1}{2}\hbar$ の他、原子核の中心に対する軌道角運動量 ($l = 0, \hbar, 2\hbar \dots$) をもつ。古典力学では、核子の「全角運動量」 $\vec{j} = \vec{s} + \vec{l}$ の大きさは、最大 $l + s$, 最小 $l - s$ の値をもつが、量子力学では次の2通りのみ可能である：

$$j = l + \frac{\hbar}{2} \qquad j = l - \frac{\hbar}{2} \quad (l > 0)$$

一般に、2つの角運動量 \vec{j}_1, \vec{j}_2 を合成するとき、合成角運動量 $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ の大きさは

$$J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - \hbar, \dots |j_1 - j_2|$$

原子核中の核子の数は A のときに、原子核のスピン(全角運動量) は

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i$$

となる。 A は偶数のときに、 $J = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$ となり、原子核は boson である。 A は奇数のときに、 $J = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$ となり、原子核は fermion である。

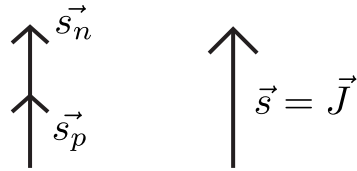
また、原子核の基底状態と励起状態のスピンは一般にそれぞれ異なっている。

角運動量についての復習は以上です。

具体例：

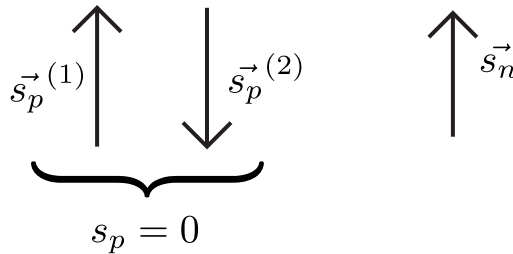
- $A = 2$ (${}^2\text{H} =$ 重陽子 = deuteron): 基底状態のみ存在し、そのスピンは $J = \hbar$. なお、陽子 (p) と中性子 (n) の相対軌道角運動量

はほぼゼロであるので、合成スピン $\vec{s} = \vec{s}_p + \vec{s}_n$ は原子核のスピン \vec{J} となる：



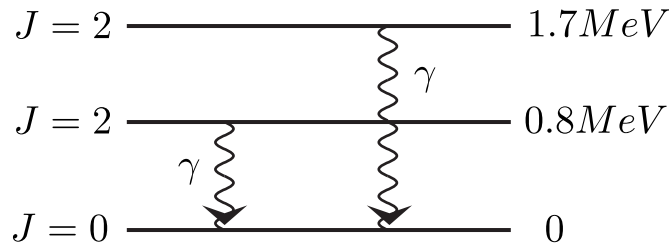
$J = 0$ (陽子と中性子のスピンは逆向き) も物理的に可能な状態であるが、核力がわずかにスピンに依存するので、 $J = 0$ の状態は固まらない。

- $A = 3$ (Helium-3): 基底状態は $J = \frac{\hbar}{2}$. 主に次のようになる：



(相対軌道角運動量は近似的に皆ゼロ。) 一般に、原子核中の同種粒子 (p or n) は逆向きのスピンをとる傾向がある (pairing 現象)。 ${}^3\text{He}$ を磁場で偏極 (polarize) すると、結果的に中性子を偏極することになる。

- $A = 4$ (Helium-4): $J = 0$: (pp) および (nn) は別々スピンゼロである。
- $A = 6$ (Lithium-6): $J = \hbar$. それは、 ${}^6\text{Li} = {}^4\text{He} + {}^2\text{H}$ を考えると自然である (クラスター模型)。
- $A = 56$ (Iron-56): 基底状態は $J = 0$, 第1、第2励起状態は $J = 2\hbar$ をもつ：電磁気相互作用 (γ 線放出) で基底状態へ戻る励起状態の寿命は 10^{-12} s 程度である。



- 重い原子核の例： $A = 238$ (Uranium-238): 基底状態は $J = 0$, 励起状態は $J = 2\hbar, 4\hbar, 6\hbar, \dots$ この例では、励起エネルギーとスピンとの関係は回転する剛体の場合に似ている（次のページの図に参照）：

$$E_J \simeq \frac{J^2}{2I} \quad (J = 0, 2\hbar, \dots)$$

ただし、 I は慣性モーメントである。

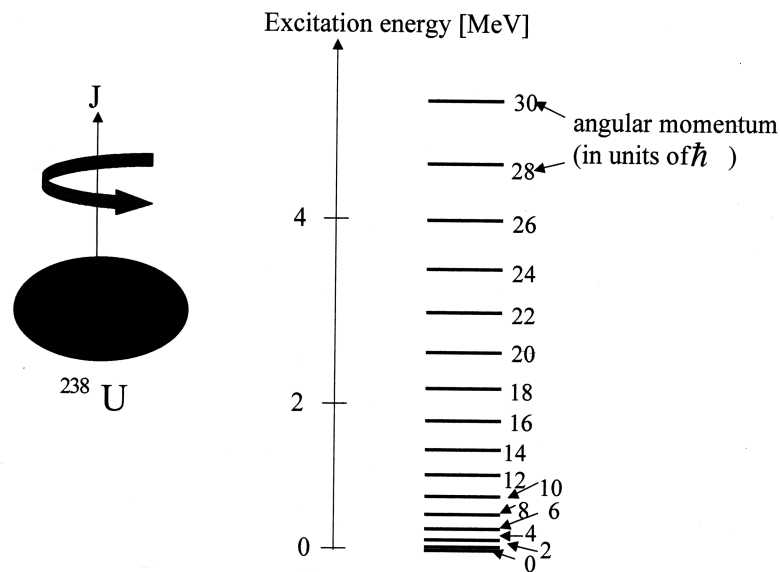
古典論との類推で、ここで原子核の回転角速度(ω)を評価する：剛体の慣性モーメント $I = \frac{2}{5}MR^2$ （楕円体を半径 R の球体で近似）²。力学で勉強した関係式 $J = I\omega$ を使う。原子核のスピン $J = \hbar\bar{J}$ ($\bar{J} = 0, 2, 4, \dots$) および原子核の質量 $M \simeq AM_N$, 半径 $R = r_0A^{1/3}$ を使うと、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{5}{2} \frac{J}{MR^2} = \frac{5}{2} \frac{\hbar\bar{J}}{A^{5/3}M_N r_0^2} = \left(\frac{\bar{J}}{A^{5/3}} \right) \frac{5}{2} \frac{\hbar c}{M_N c^2 r_0^2} \cdot c \\ &= \left(\frac{\bar{J}}{A^{5/3}} \right) \frac{5}{2} \frac{197}{940 \times (1.1)^2} [\text{fm}^{-1}] \times 3 \times 10^{23} [\text{fm/s}] \\ &\simeq \left(\frac{\bar{J}}{A^{5/3}} \right) \times 1.3 \times 10^{23} [\text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

例えば、 $\bar{J} = 2, A = 238$ の場合、 $\omega = 2.8 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$ で、1秒間で約 10^{18} 回回転する！

²量子力学では、対称軸の周りの回転は無意味である。（その理由：元の状態と回転された状態との区別できないから。）例えば完全な球の回転は量子力学では無意味である。ここで軸対称性（楕円体）を想定し、対称軸に垂直の軸の周りに回転していると考え。大きな原子核の場合はそのような「半古典的」な取扱は成立するが、小さい系では成立しない。

Example: Excitation spectrum of ^{238}U



次に、理論の立場から原子核のスピンについて考える：

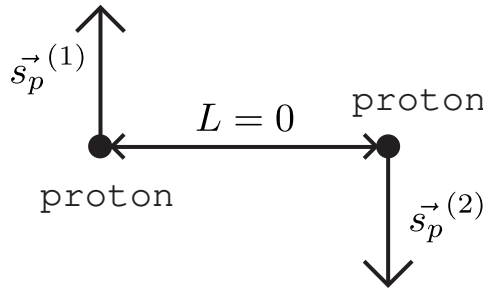
1. N= 偶数、Z=偶数の原子核の場合は、基底状態のスピンは必ずゼロである（例外なし）。

原子核中の陽子 2 個について考える。相対軌道角運動量 $L = 0$ の場合遠心力はゼロなので、互いの核力（引力）は最も効果的に作用し、エネルギーは最低となる。従って、陽子同士の相対軌道角運動量 $L = 0$ は優先である。それは、陽子の pair が原子核中に同じ軌道に乗って原子核の中心を回っているという意味している。

ここで Pauli の排他律 (Pauli's exclusion principle) を思い出す：

2 個の同種の粒子は同じ量子状態に存在できない。

従って、2 個の陽子は同じ軌道に乗っている場合、スピンは逆向き： $S = 0$ 。



中性子についても同様なので、 N も Z も偶数の原子核の基底状態は $L = S = 0$ の pair から成り、全角運動量 $J = 0$ となる (pairing 現象)。第 1 励起状態は、1 つの pair は破れているように解釈できるので、pair の束縛エネルギーは経験的に次のようになる：

$$\Delta_A = 12 \times A^{-1/2} \text{ MeV} \simeq 1 - 2 \text{ MeV}$$

2. A= 奇数の場合、基底状態のスピンは「残り 1 個」の核子の角運動量である。

その「残り 1 個」の核子の角運動量は殻模型で簡単に予言できる。(別の講義で勉強する。) 例えば、

- ${}^3\text{He} = (\text{pp})_{J=0} + (n)_{j=1/2} \Rightarrow J = 1/2$
- ${}^{11}\text{B} = (4\text{p}, 6\text{n})_{J=0} + (p)_{j=3/2} \Rightarrow J = 3/2$

(この例では、 ${}^{11}\text{B}$ の「最後の陽子」(valence proton) は軌道角運動量 $\ell = 1$, スピン $s = 1/2$, 全角運動量 $j = 3/2$ をもつ。微細は「殻模型」で勉強する。)

3. 核力のスピン依存性について：

Deuteron のスピンは $J = 1$ であることが、観測された磁気モーメントから分かる。その状態では、陽子と中性子の

- 相対軌道角運動量 $L = 0$ (遠心力はゼロの場合、核力の引力は最も効果的に働けるから)

- 合成スピン $S = 1$ (p, n のスピンは平行)。

スピン $J = 0$ の (pn) 原子核は存在しないから、核力について次のことが言える：

$$\text{Attraction for } S = 1 > \text{Attraction for } S = 0 \quad (5.1)$$

それでは、何故 (pp) および (nn) の原子核は存在しないか？

その場合も相対軌道角運動量 $L = 0$ であるので、 $S = 1$ (スピン平行) の状態が Pauli の排他律で禁じられている。 $L = 0, S = 0$ は量子力学的な状態として可能だが、(5.1) のために固まらない。従って、(pp), (nn) の原子核は存在しない。

6 核力は核子の種類 (p,n) に依存するか？

(1) 先ず、原子核中の (pp) と (nn) 間の核力を比較したい。そのために、同じ A をもつ原子核 (Z, N) と原子核 (N, Z) のエネルギー順位を比較する。例えば、ボルン-11 (${}_{5}^{11}\text{B}_6$) と炭素-11 (${}_{6}^{11}\text{C}_5$) の場合は、基底状態のエネルギーを合わせると、観測されたエネルギー順位は次のページの図のようになる。

比較の結果: 陽子と中性子を入れ換えても、エネルギー順位は変わらない。ここで核子の pair の数を数える：

(pp) pair の数は、 ${}_{5}^{11}\text{B}_6$: 10, ${}_{6}^{11}\text{C}_5$: 15

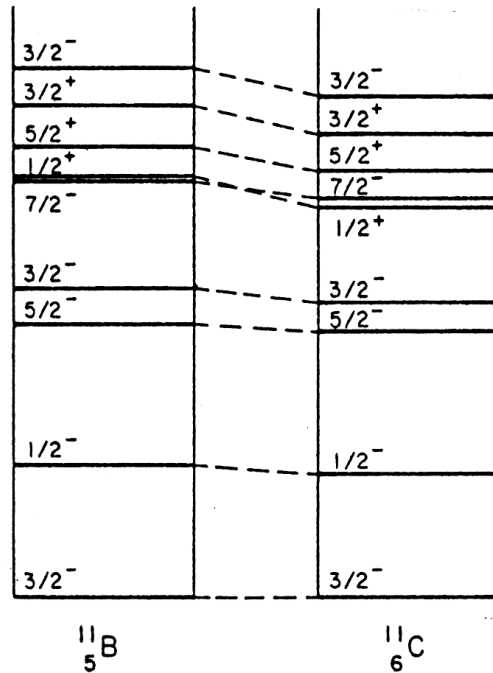
(nn) pair の数は、 ${}_{5}^{11}\text{B}_6$: 15, ${}_{6}^{11}\text{C}_5$: 10

(pn) pair の数は、 ${}_{5}^{11}\text{B}_6$: 30, ${}_{6}^{11}\text{C}_5$: 30

従って、各状態でのエネルギーの差(クーロン以外)：

$$\begin{aligned} E({}^{11}\text{B}) - E({}^{11}\text{C}) &= (10V_{pp} + 15V_{nn} + 30V_{pn}) \\ &\quad - (15V_{pp} + 10V_{nn} + 30V_{pn}) = 5(V_{nn} - V_{pp}) \end{aligned}$$

(例えば基底状態の場合、 V_{pp} は基底状態での pp 間の平均のポテンシャルエネルギーを表している。 V_{nn} も同様。)



エネルギー順位はほぼ同じなので、

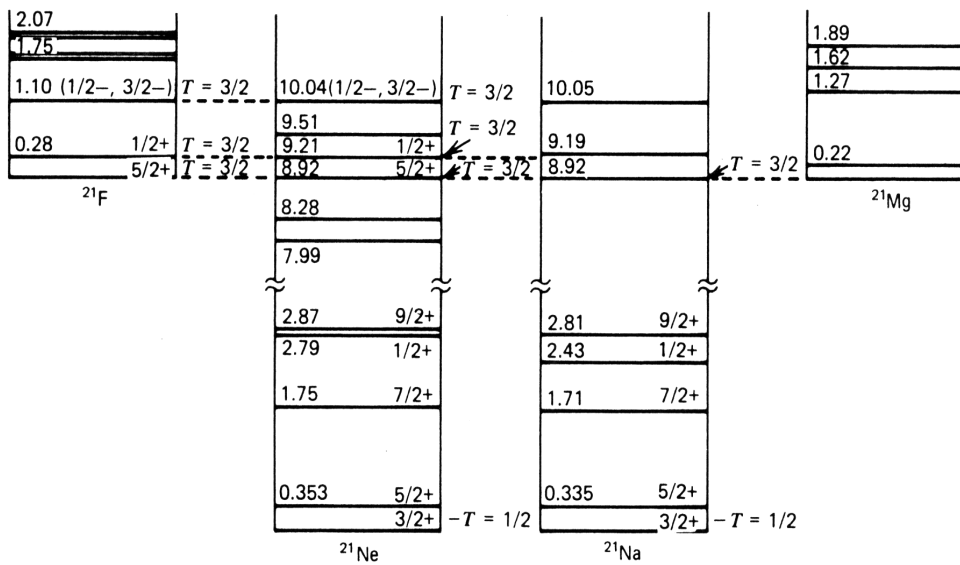
$$V_{nn} = V_{pp}$$

この性質は「核力の荷電対象性」(charge symmetry of nuclear force) と呼ぶ:

pp および nn 間の核力は同じである。

ただし、比較するとき、同じ軌道、同じスピンをもつ pp および nn の pair を考える。

(2) 次に、原子核中の (pn) と (nn) 間の核力を比較したい。そのために、同じ A をもつ原子核 (Z, N) と原子核 (Z', N') [$Z+N=Z'+N'$] のエネルギー順位を比較する。例えば、フロリン-21 ($^{21}_9\text{F}_{12}$), ネオン-21 ($^{21}_{10}\text{Ne}_{11}$), ナトリウム-21 ($^{21}_{11}\text{Na}_{10}$), マグネジウム-21 ($^{21}_{12}\text{Mg}_{11}$) の場合は、クーロンエネルギーを引き算すると、エネルギー順位は次の図のようになる。



比較の結果: 核力の荷電対称性より、 (Z, N) と (N, Z) の原子核は同じエネルギー順位をもっているが、一般に比較すると

- $|N - Z|$ が小さい原子核 (^{21}Ne , ^{21}Na) のエネルギー低い状態は、隣りの原子核 (^{21}F , ^{21}Mg) には存在しない。
- $|N - Z|$ が小さい原子核 (^{21}Ne , ^{21}Na) のエネルギー高い (~ 9 MeV) 状態は、隣りの原子核 (^{21}F , ^{21}Mg) の基底状態に対応することも分かる。

以上のことを、前に勉強した「対称エネルギー」(symmetry energy) で説明することができる：原子核の簡単なモデルとして、陽子と中性子をそれぞれの井戸型ポテンシャルに下からつめる。陽子と中性子について対称的につめた原子核 (Z, Z) の基底状態は、非対称的につめた原子核 $(Z + 1, Z - 1)$ の基底状態よりエネルギーは低い。更に、対称原子核 (Z, Z) の励起状態は、非対称原子核 $(Z + 1, Z - 1)$ の基底状態に対応することも分かる。

上記の4つの原子核での核子の pair の数を考える：

pair の数	${}^{21}_{9}\text{F}_{12}$	${}^{21}_{10}\text{Ne}_{11}$	${}^{21}_{11}\text{Na}_{10}$	${}^{21}_{12}\text{Mg}_9$
pp	36	45	55	66
nn	66	55	45	36
pn	108	110	110	108
total	210	210	210	210

ポテンシャルエネルギーの差 (クーロンなし)：

- ${}^{21}\text{F} - {}^{21}\text{Mg}$: $30(V_{nn} - V_{pp}) = 0$ (核力の荷電対称性から)
- ${}^{21}\text{Ne} - {}^{21}\text{Na}$: $10(V_{nn} - V_{pp}) = 0$ (核力の荷電対称性から)
- ${}^{21}\text{Ne} - {}^{21}\text{F}$: $9V_{pp} - 11V_{nn} + 2V_{pn} = 2(V_{pn} - V_{pp})$

${}^{21}\text{F}$ と ${}^{21}\text{Ne}$ を比較すると、対応する状態が存在し、その状態でのエネルギーは同じである。従って、対応する状態では $V_{pn} = V_{pp}$ 。従って、「核力の荷電独立性」 (charge independence of nuclear force) も成り立つ：

$$V_{pn} \simeq V_{nn}$$

pn および nn 間の核力は同じである。

ただし、比較するときに、同じ軌道、同じスピンをもつ pn および nn の pair を考える。特に、全く同じ軌道、スピンをもつ (pn) の状態が可能が、(nn) のときは Pauli の排他律のために不可能である。「対応がない状態」は比較できないので、注意が必要。