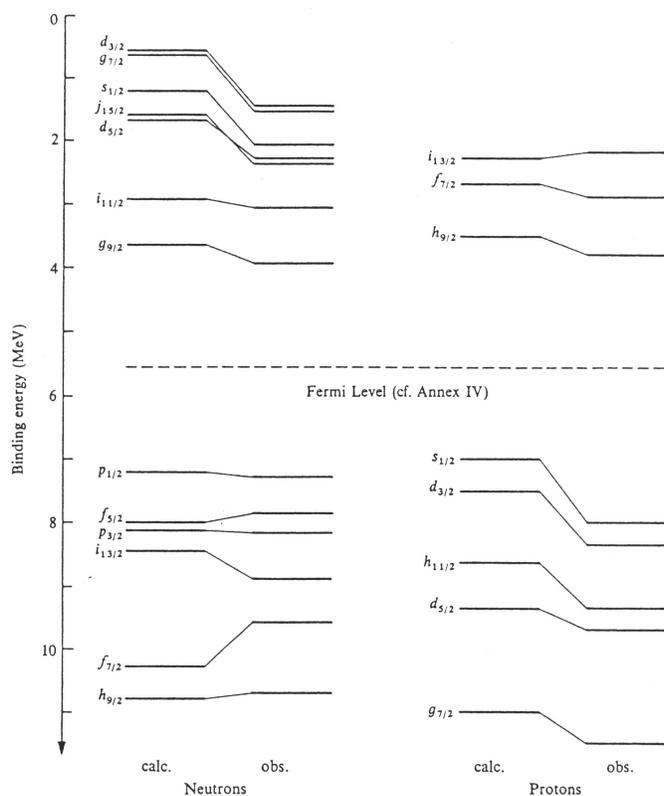


8 殻模型の応用の例

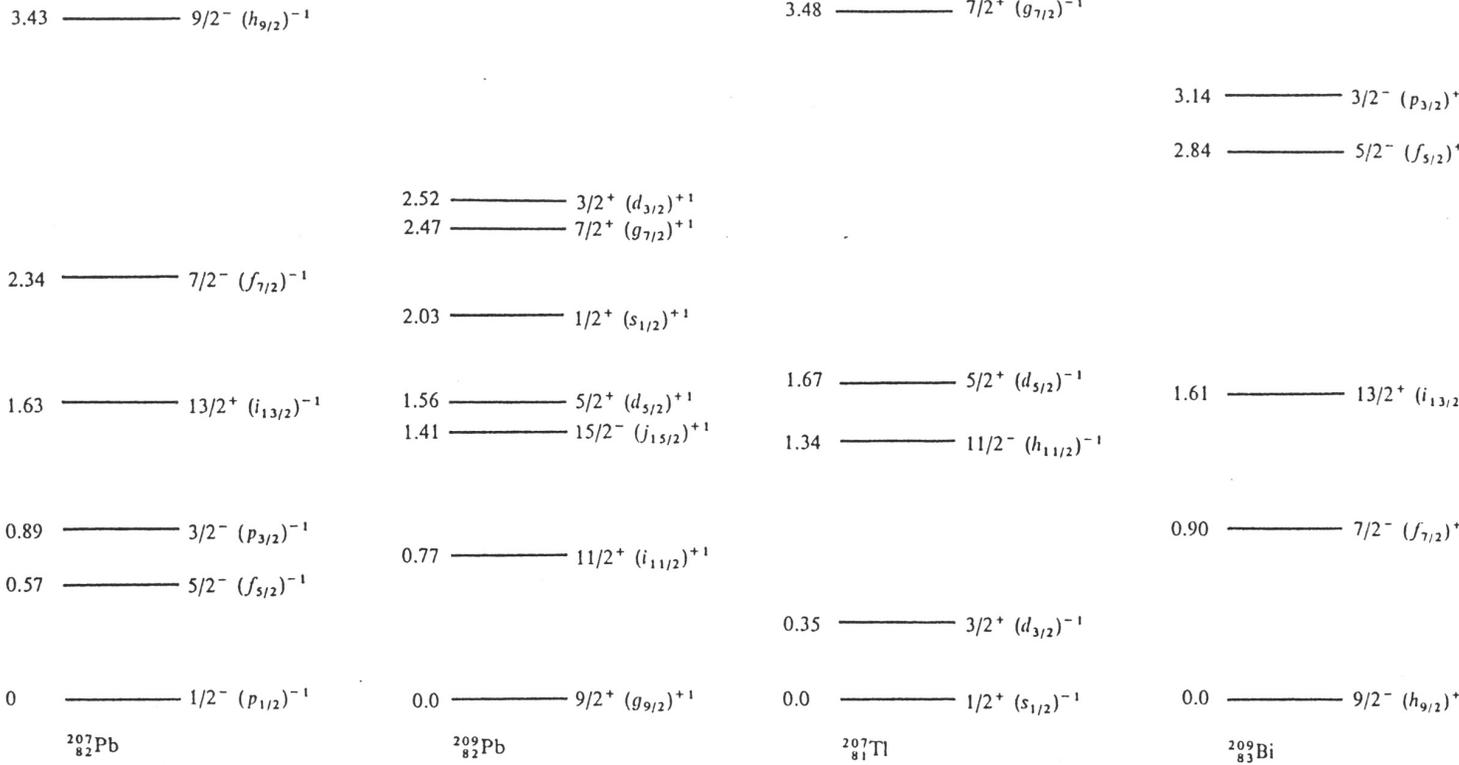
原子核の殻模型の例として、鉛 ($^{208}\text{Pb}_{126}$) 周辺の原子核を考える： $^{209}\text{Pb}_{127}$, $^{207}\text{Pb}_{125}$, $^{209}\text{Bi}_{126}$, $^{207}\text{Tl}_{126}$. それらの原子核は、鉛の「芯」(doubly magic core) ± 1 個の核子として考えることができる。 $Z = 82$ および $N = 126$ 周辺の一粒子エネルギー順位は次の通り¹：



^{208}Pb の芯の全角運動量 $J = 0$ である：殻模型では、完全に詰まっている軌道の全角運動量の z -成分は常にゼロである： $J_z = \sum_{-j}^{+j} j_z = 0$.
従って、全角運動量 (J) もゼロである。(もし $J > 0$ ならば、 $J_z = -J, -J + 1, \dots, J$ の状態も存在することになるから。)

¹ ^{208}Pb の場合は、Fermi level まで全ての軌道はつまっている。calc は Woods-Saxon 型ポテンシャル + スピン軌道ポテンシャルでの計算結果、obs は ^{208}Pb 周辺の4つの原子核のエネルギー順位から導かれた観測値である。

次の図では、 ^{208}Pb 周辺の4つの原子核の観測されたエネルギー順位、その全角運動量および parity を示す²。



1. それらの原子核の基底状態：

次の単純な考え方で、それらの4つの原子核で測定された全角運動量 (J) とパリティを説明できる：

$$^{207}\text{Pb} (J = 1/2) = ^{208}\text{Pb} - n[p_{1/2}]$$

$$^{209}\text{Pb} (J = 9/2) = ^{208}\text{Pb} + n[g_{9/2}]$$

$$^{207}\text{Tl} (J = 1/2) = ^{208}\text{Pb} - p[s_{1/2}]$$

$$^{209}\text{Bi} (J = 9/2) = ^{208}\text{Pb} + p[h_{9/2}]$$

²例： $9/2^-$ は $j = 9/2$, parity = -1 という意味。また、 $(h_{9/2})^-$ は、殻模型での記述では $\ell = 5$ と $s = 1/2$ と合成した角運動量 $j = 4 + 1/2 = 9/2$, 上付きのマイナスは「孔状態」(^{208}Pb の芯から 1個抜けた状態) という意味。

その単純な模型では、観測データ (束縛エネルギー B_A) から一粒子のエネルギーの値も分かる：例えば、中性子の $g_{9/2}$ 軌道のエネルギーは、 ^{209}Pb から中性子 1 個を取り除くためのエネルギー (separation energy S_n) に等しい：

$$S_n[^{209}\text{Pb}] = B_A[^{209}\text{Pb}] - B_A[^{208}\text{Pb}] \simeq 4\text{MeV}$$

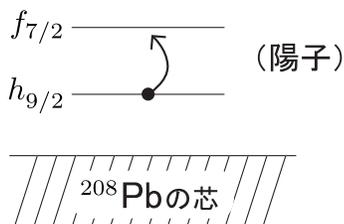
同様に、中性子の $p_{1/2}$ 軌道のエネルギーは ^{208}Pb から中性子 1 個を取り除くためのエネルギーに等しい：

$$S_n[^{208}\text{Pb}] = B_A[^{208}\text{Pb}] - B_A[^{207}\text{Pb}] \simeq 7\text{MeV}$$

同様に、陽子の $h_{9/2}$ および $s_{1/2}$ 軌道のエネルギーも分かる (p. 1 の図を参照)。

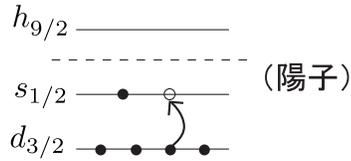
2. その原子核の励起状態:

例えば、 ^{209}Bi を励起するには、陽子を $h_{9/2}$ 軌道からより高い軌道へ移せばよい：

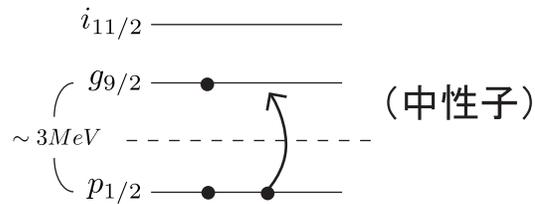


このように、 ^{209}Bi の第1励起状態の励起エネルギーから陽子の $f_{7/2}$ 軌道のエネルギーが決まる (p. 1 の図を参照)。

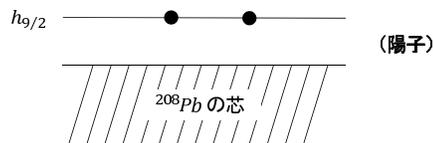
同様に、 ^{207}Tl を励起するには、 $s_{1/2}$ の陽子の孔 (hole) をより低い軌道へ移せばよい。即ち、 ^{207}Tl の第1励起状態の励起エネルギーから陽子の $d_{3/2}$ 軌道のエネルギーが決まる (p. 1 の図を参照)。



注意：このように、原子核全体の励起状態を「1粒子の励起状態」として説明できるが、励起エネルギーが 3 MeV 以上の場合 ^{208}Pb 芯の励起も考えないと行けないので、より複雑な状態が現れる。例えば、 ^{209}Pb の場合、



閉核の芯 + 2個の核子の例：



2個の陽子の角運動量 ($j = 9/2$) を合成すると、全角運動量 $J = 0, 2, 4, 6, 8$ は可能となる。相互作用がない場合、皆縮退している。相互作用があるために、その縮退が解け、 ^{210}Po の基底状態は $J = 0$ をもつことを説明できる：

2800 ————— (11⁻)

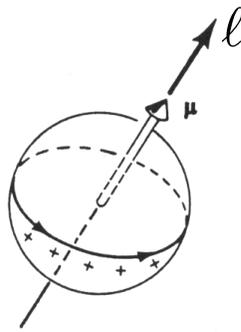
1510 ————— 8⁺
1471 ————— 6⁺
1425 ————— 4⁺
1180 ————— 2⁺

0 ————— 0⁺
 ${}_{84}^{210}\text{Po}_{126}$

注意： ${}^{210}\text{Po}$ 原子核は α 崩壊して、安定な ${}^{206}\text{Pb}$ へ変る。

原子核の磁気モーメント (Nuclear magnetic moments)

陽子(電荷 $e > 0$, 質量 M_N) は軌道角運動量 $\vec{\ell}$ で原子核内を運動するとき、軌道角運動量 $\vec{\ell}$ に平行した磁気モーメント ($\vec{\mu}$) が発生する:



電磁気学（電気回路の理論）では、運動する電荷から引き起された磁気モーメントの大きさは

$$\begin{aligned}\mu_l &= \frac{1}{c} \times (\text{electric current}) \times (\text{area of loop}) \\ &= \frac{1}{c} \times e\nu \times r^2\pi \quad \left(\nu = \frac{v}{2\pi r}\right) \\ &= \frac{e}{2M_Nc} (mrv) = \frac{e}{2M_Nc} \ell \quad (\ell = |\vec{\ell}|)\end{aligned}$$

である。ベクトルとして書くと、

$$\vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2M_Nc} \vec{\ell} = \frac{e\hbar}{2M_Nc} \left(\frac{\vec{\ell}}{\hbar}\right) \equiv \mu_N \left(\frac{\vec{\ell}}{\hbar}\right) g_l$$

但し、陽子の場合は $g_l = 1$ (陽子の軌道角運動量の g-factor)、
 $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_Nc} = \text{nuclear magneton}$. 中性子の場合は電荷がゼロなので、
 $g_l = 0$.

軌道角運動量他に、核子のスピン \vec{s} も磁気モーメントを引き起こす。それは古典論で説明できないが、形は次のようになる：

$$\vec{\mu}_s = \mu_N \left(\frac{\vec{s}}{\hbar}\right) g_s$$

$g_s =$ スピンの g-factor,

$$\begin{aligned}2 & \quad \text{point particle} \leftrightarrow \text{Dirac's theory} \\ g_s = 5.58 & \quad \text{proton} \\ -3.82 & \quad \text{neutron}\end{aligned}$$

核子の磁気モーメントの演算子は軌道角運動量とスピンから生じる和である：

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$$

従て、原子核の磁気モーメントの演算子は

$$\vec{\mu}_A = \sum_{i=1}^A \vec{\mu}_i = \frac{e}{2M_N c} \sum_{i=1}^A \left(g_{li} \vec{l}_i + g_{si} \vec{s}_i \right)$$

で表される。但し、

$$(g_{si}, g_{li}) = \begin{cases} (1, 5.58) & i = \text{proton} \\ (0, -3.82) & i = \text{neutron} \end{cases}$$

磁気モーメント演算子 (z 成分) の期待値

$$\mu_A = \langle \text{nucleus} | \mu_{Az} | \text{nucleus} \rangle \quad (8.1)$$

は観測量となる。

(Z, N)=(偶, 偶) の原子核の磁気モーメントは常にゼロである。なぜならば、その原子核の全角運動量は $J = 0$ であり、そのときに任意のベクトル演算子 \vec{A} の期待値はゼロである³ :

$$\langle J = 0 | \vec{A} | J = 0 \rangle = 0 \quad (8.2)$$

(Z, N)=(偶, 奇) or (奇, 偶) の原子核の磁気モーメントは、「残りの1個」の核子 (“valence nucleon”) の磁気モーメントとなる:

$$\mu_A = \langle \text{nucleus} | \mu_{Az} | \text{nucleus} \rangle = \langle \text{valence} | \mu_z | \text{valence} \rangle.$$

この valence nucleon の軌道は原子核の殻模型から分るので、その原子核の磁気モーメントを殻模型で計算できる。その結果を“Schmidt の値” (Schmidt value) と呼ばれている。例えば、

$$\begin{aligned} {}^{17}\text{F} &= {}^{16}\text{O} + p[(l = 2, s = 1/2)j = 5/2] \\ \mu_A &= \langle (l = 2, s = 1/2)j = 5/2 | \mu_{p,z} | (l = 2, s = 1/2)j = 5/2 \rangle \end{aligned}$$

³角運動量 $J = 0$ の場合、式 (8.2) の左辺を表すベクトルは存在しない。

$${}^{17}\text{O} = {}^{16}\text{O} + n[(l = 2, s = 1/2)j = 5/2]$$

$$\mu_A = \langle (l = 2, s = 1/2)j = 5/2 | \mu_{n,z} | (l = 2, s = 1/2)j = 5/2 \rangle$$

$${}^{41}\text{Sc} = {}^{40}\text{Ca} + p[(l = 3, s = 1/2)j = 7/2]$$

$$\mu_A = \langle (l = 3, s = 1/2)j = 7/2 | \mu_{p,z} | (l = 3, s = 1/2)j = 7/2 \rangle$$

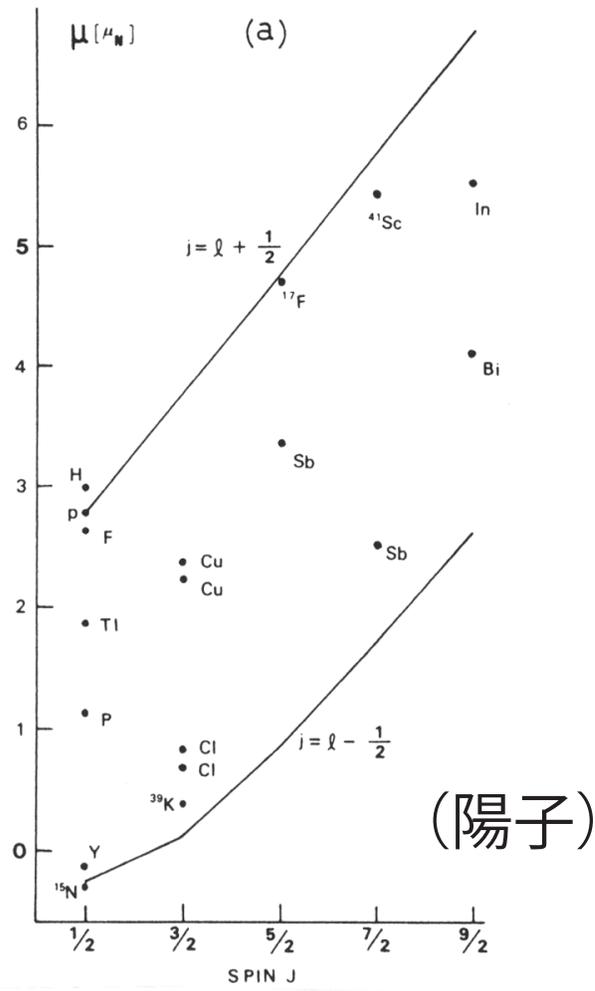
$${}^{41}\text{Ca} = {}^{40}\text{Ca} + n[(l = 3, s = 1/2)j = 7/2]$$

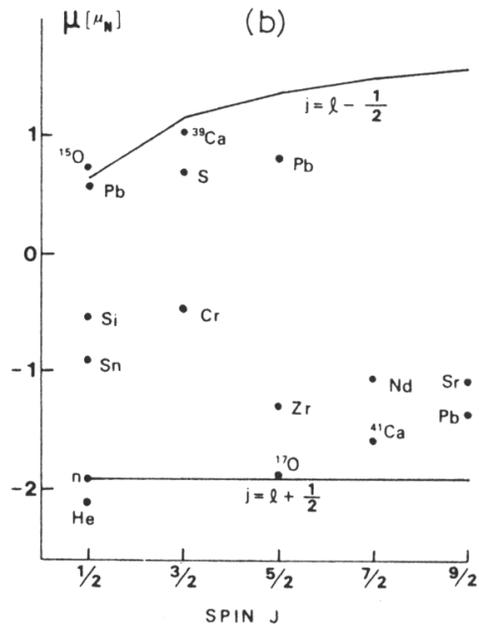
$$\mu_A = \langle (l = 3, s = 1/2)j = 7/2 | \mu_{n,z} | (l = 3, s = 1/2)j = 7/2 \rangle$$

Schmidt の値からのずれの原因：Valence 核子と「心」(${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$ など)の核子との相互作用。そのために、「心」は一時的に励起される。(「有馬・堀江効果」)

下の図 (a)は $(Z,N) = (\text{奇}, \text{偶})$ 原子核の磁気モーメントの測定値と原子核のスピン (J) との関係を示している。2本の線は Schmidt の値 ($j = l + 1/2$, $j = l - 1/2$) である。図 (b)は $(Z,N) = (\text{偶}, \text{奇})$ 原子核に対応する。

多くの場合は、磁気モーメントの観測値は2本の Schmidt 線に挟まれている。原子核の磁気モーメントの理論的な説明は現在も核物理の研究テーマである。





(中性子)