1　Bohr の原子模型について（発足)

水素原子から放射される光線についての Balmer 公式を出すために、Bohr が 1913 年に電子のエネルギー E と力学的な回転数 ν との間に次の関係式を仮定した：

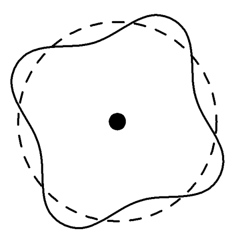
$$E = -\frac{n}{2}h\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.1}$$

ただし h は Planck の定数である。この仮定が次の条件と等価である：

- 電子の「物質波」が定在波である (de Broglie のアイディア！)：

$$2\pi r = n\lambda \tag{1.2}$$

  ただし、r が軌道の半径、$\lambda = h/p$ が波長である。



- 電子の軌道角運動量 ℓ が量子化されている（Sommerfeld のアイディア！)：

$$\ell = n\hbar \qquad (\hbar = h/(2\pi))$$

1) 先ず、(1.1) 式から Balmer の公式を導く：

等速度円運動について Newton の第2法則

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \frac{e^2}{r} = mv^2 \tag{1.3}$$

を使って、電子のエネルギーが

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{m}{2}v^2 \tag{1.4}$$

となる。Bohr の仮定 (1.1) を使うと、

$$E = -\frac{m}{2}v^2 = -\frac{n}{2}h\nu = -\frac{n}{2}h\frac{v}{2\pi r} = -\frac{n}{2}\hbar\frac{mv^3}{e^2} \tag{1.5}$$

ただし、最後の等式に (1.3) を使った。この式から、

$$\frac{n\hbar v}{e^2} = 1 \tag{1.6}$$

が分かる。それを式 (1.4) に代入すると、Balmer の公式が出てくる：

$$E = -\frac{m}{2}v^2 = -\frac{m}{2}\frac{e^4}{n^2\hbar^2} \tag{1.7}$$

2) 次に、条件 (1.6) が「定在波の条件」 および
「角運動量の量子化」と一致する ことを示す：

(1.6) に Newton の第2法則 ($e^2 = mv^2r$) を代入すると、

$$\frac{n\hbar v}{e^2} = \frac{n\hbar}{mvr} = 1 \tag{1.8}$$

となる。それが定在波条件と一致する：

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p} = n\frac{h}{mv} \Rightarrow \frac{n\hbar}{mvr} = 1$$

また、最後の恒等式が、角運動量 $\ell = mvr$ を使って、

$$\ell = n\hbar$$

となり、角運動量の量子化を表している。

2　粒子・波動の二重性について

Bohr 達が何についてそんなに熱心に議論したのでしょうか？
ここで R. Feynman の説明を紹介する: Feynman: Lectures on Physics, Vol. III。傑作なので、必ず自分で読んで下さい！

Feynman が次の「二重スリット実験」について議論する：

1) 弾丸を2つのスリット付きの壁に向かって発射する。後ろの壁 (back-stop) で弾丸の数を x の関数として測定する。 (Fig.1)

- スリット 2 を閉じて、スリット 1 を通った結果： P_1.
- スリット 1 を閉じて、スリット 2 を通った結果： P_2.

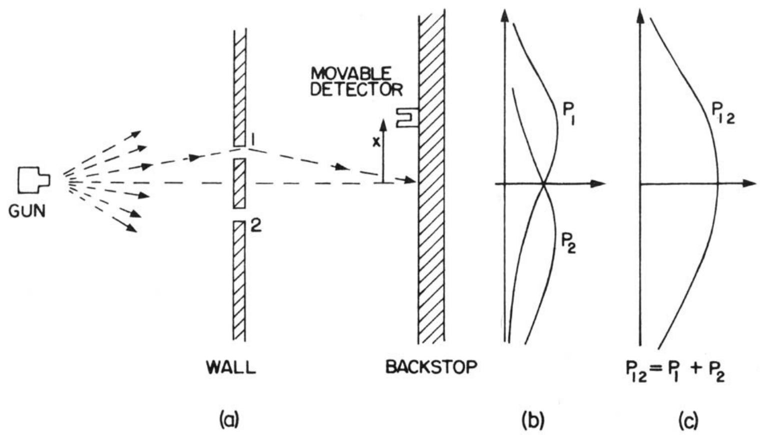


Figure 1: 弾丸の実験

- 両方のスリットが開いた結果：

$$P_{12} = P_1 + P_2 \tag{2.1}$$

従って、「干渉がない」と結論する。

2) 水波を発生させる。２つのスリット付きの壁を通過した後、後ろの壁 (absorber) で波の強度を x の関数として測定する。(Fig.2) ただし、「強度」I が波の高さ（振幅 h) の自乗である：$I = h^2$.

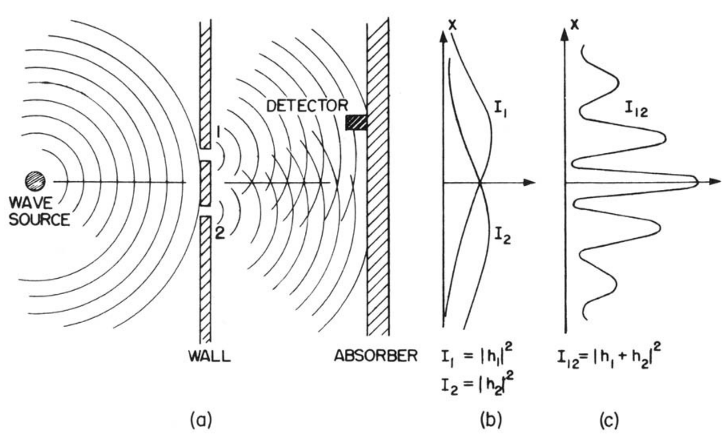


Figure 2: 水波の実験

- スリット 2 を閉じて、スリット 1 を通った結果： $I_1 = h_1^2$.
- スリット 1 を閉じて、スリット 2 を通った結果： $I_2 = h_2^2$.

- 両方のスリットが開いた結果：

$$P_{12} = (h_1 + h_2)^2 = I_1 + I_2 + 2h_1h_1 \neq I_1 + I_2. \tag{2.2}$$

従って、「干渉がある」と結論する。

3) 電子を2つのスリット付きの壁に向かって発射する。後ろの壁 (backstop) で電子の数を x の関数として測定する。 (Fig.3)

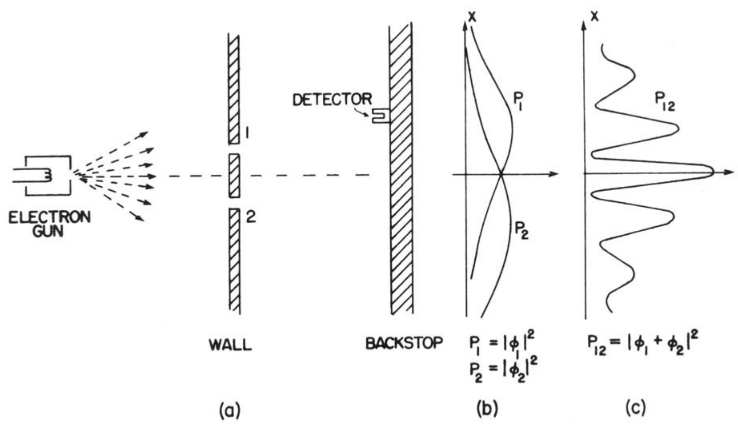


Figure 3: 電子の実験

- スリット 2 を閉じて、スリット 1 を通った結果： P_1.
- スリット 1 を閉じて、スリット 2 を通った結果： P_2.
- 両方のスリットが開いた結果：

$$P_{12} \neq P_1 + P_2 \tag{2.3}$$

「干渉がある」と結論する！

電子の実験についてより詳しく考えよう。次の「単純な考え方」が正しいかどうかについて検討する：

各電子がスリット 1 もしくは
スリット 2 を通った ... (A)

そのために、スリット 1 とスリット 2 の直ぐ後ろに光源 1 と光源 2 をおく。 (Fig.4)

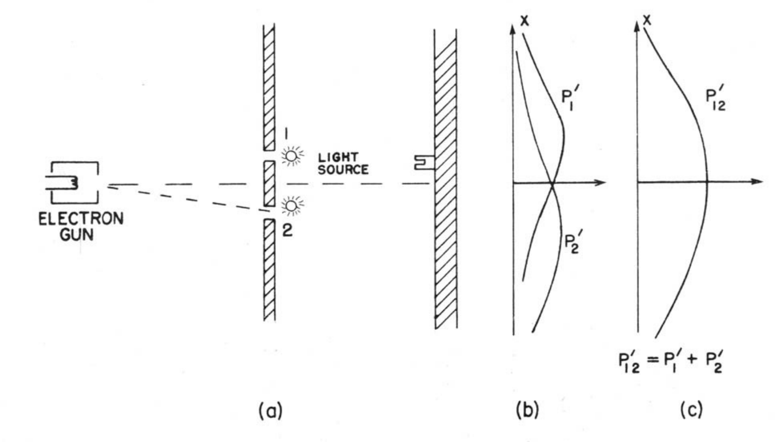


Figure 4: 電子の実験 + 光源

- もし電子がスリット 1 を通った場合、光源 1 からの光子が我々の目に向かって散乱される。そのときに、「電子がスリット 1 を通った」と判断する。
- もし電子がスリット 2 を通った場合、光源 2 からの光子が我々の目に向かって散乱される。そのときに、「電子がスリット 2 を通った」と判断する。

観測結果が次ぎのようになる：

電子が通ったスリットを測定できた場合は、干渉がない！電子が「粒子」として振る舞う。

電子が光源の光子から運動量をもらって、そのために干渉パターンがなくなったと考えられる。従って、今度は光源の波長を長く（光子の運動量を低く）して見よう。実験やって見ると、散乱された光のスポットが広くなった！波長がスリットの間隔より長くなった場合、どちらの光源が光ったのか分からなくなってしまう。その場合は、干渉パターンが回復する！

電子が通ったスリットを観測できなかった
（もしくはしなかった）場合は干渉がある！
電子が「波」として振る舞う。

結局、考え方 (A) が正しいでしょうか？電子が通ったスリットを観測すれば正しい。電子が通ったスリットを観測しなければ、誤り。**観測しないものが「現実性 (reality)」がない。** Reality がないものについて議論することが無意味である。
(Einstein 達の EPR パラドックス, Schrödinger の猫にも関係があるので、ネットで軽く調べて下さい。)