(I) 力学と解析力学

1. I. Newton (1642-1726, England): 物体の運動方程式（Newtonの第2法則）を発見。１次元の場合、座標を $q(t)$ とすれば

$$m\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}U(q)}{\mathrm{d}q}\,. \tag{1}$$

$U(q)$ はポテンシャルエネルギーである。

2. L. Euler (1707-1783, Swiss) と J. Lagrange (1736 - 1813, Italy): 数学の変分法を発見：次の積分の値は**最も小さく**なるために、関数 $y(x)$ をどのようにとればよいか?

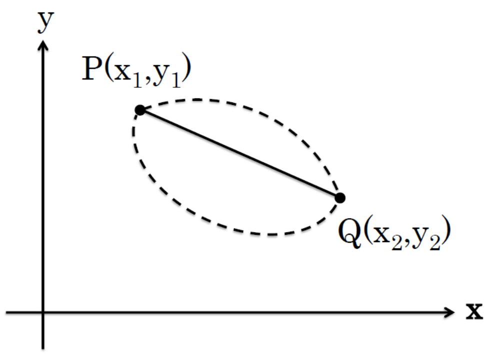
$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

ただし、$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 積分の下限 (x_1) と上限 (x_2) およびそのときの $y(x_1)$ と $y(x_2)$ の値を固定する（与える)。
この問題の答えが次のようになる（後で照明する）:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\,. \tag{3}$$

この方程式は **Euler-Lagrange equation** と呼ばれ、求めたい関数 $y(x)$ についての微分方程式である。

簡単な例：(x, y) 平面で２つの点 $P(x_1, y_1)$ と $Q(x_2, y_2)$ を結ぶ最短の曲線 $y(x)$ を求めよう。
図のように、P と Q を結ぶ曲線は色々あるが、ここで「直線」は最短であることを (3) から導く。



任意の曲線 $y(x)$ の長さを計算する：微小の長さ $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ を使って、

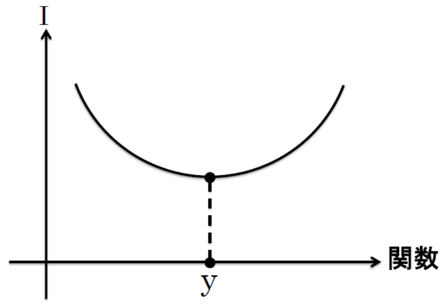
$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + y'^2}\,. \tag{4}$$

この場合は $F(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$. 従って、Euler-Lagrange equation (3) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{constant}$$
$$\Rightarrow y' = \text{constant} \Rightarrow y(x) = ax + b\,.$$

答えは勿論「直線」である!

変分法のアイディア：積分 I が最小値になったときに、関数 $y(x)$ を $y(x) + \delta y(x)$ **微小変分**しても、I の値が変わらない。(図に参照。）ただし、 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ を満たすように $y(x)$ を変分する。



3. W. Hamilton (1805-1865, Irland):
変分法を使って、Newton の運動方程式を導出することができることを発見！
次の積分を考える：
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$
ただし、$q(t)$ は粒子の「座標」（例えば普通の座標 $x(t)$ でも）, $\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ である。スタートの時刻 (t_1) での座標 $q(t_1)$ および最後の時刻 (t_2) での座標 $q(t_2)$ の値を固定する。関数 $L(q, \dot{q}, t)$ は **Lagrangian** と呼ばれ、次のように定義する：

L = (運動エネルギー $T(q, \dot{q})$) - (ポテンシャルエネルギー $U(q)$). 即ち [1]

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)\,. \tag{6}$$
そのときに積分 (5) は**作用** (action) と呼ばれている。

[1]時間に依存する力（外場）が働く場合は U が時間にも依存する：$U(q, t)$. その場合は L も時間に陽に依存する：$L(q, \dot{q}, t)$.

作用 S は最も小さくなるために粒子の座標 $q(t)$ はどうなるか？ Euler-Lagrange equation (3) に従って、$q(t)$ は次式から決まる [2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}\,. \tag{7}$$

「座標」$q(t)$ は「普通の座標」 $(x(t))$ であるときに、運動エネルギーは $T(\dot{q}) = m\,\dot{q}^2/2$. そのときに、Euler-Lagrange equation (7) は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q}\,. \tag{8}$$

となり、Newton の運動方程式 (1) と一致する！

$\Rightarrow$ 最小作用の原理 (**Hamilton の原理**): 粒子の運動を表す関数 $q(t)$ は、作用 (5) が最小の値となるように決まる。

4. 以上の形式 (Lagrange 形式) の利点はどこにあるか？

- 直接運動方程式を書き下すより、Lagrangian $L = T - U$ の方が書きやすい場合が多い。
- Lagrangian の対称性 (時間の一様性, 空間の一様性, 空間の等方性) から保存則 (エネルギー保存、運動量保存、角運動量保存）を直接導くことができる： E. Noether (1882 - 1935, Germany) の発見 (“Noether Theorem”). それについて後で詳しく勉強する。
- Lagrange 形式は力学だけでなく、他の物理学の分野にも使える。例えば、変分法から次の方程式を導くことができる：
  (1) Newton の運動方程式（力学）

[2] 式 (3) では変数は x であったが、粒子の運動のときに変数は時間 t である。

(2) Maxwell の方程式　　（電磁気学）
(3) Schrödinger 方程式　（量子力学）
(4) Einstein 方程式（一般相対性理論).

Euler-Lagrange equation (3) の導出（変分法）

最小作用 (Hamilton) の原理：次の「作用」(action) が最小の値をとることを要すれば、粒子の運動 (関数 $q(t)$) が決まる：

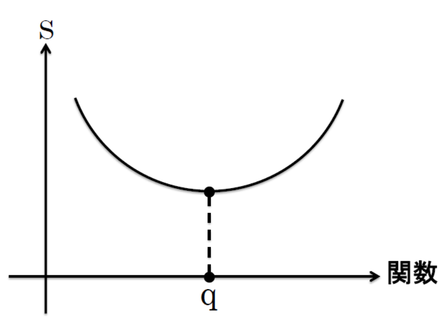
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

ただし、スタートの時刻 $t = t_1$ での位置が $q_1 = q(t_1)$, 最後の時刻 $t = t_2$ での位置が $q_2 = q(t_2)$ 与えられているとする。

作用 (9) を最小にする関数（求めたい関数）を $q(t)$ とするとき、任意の微小変分

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t) \tag{10}$$

に対して、作用 (9) は変化しない: $\delta S = 0$. ただし、$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. （$q_1$ および q_2 は固定されているので.)



式で表すと次のようになる：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = 0\,. \tag{11}$$

関数 $L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)$ を δq および $\delta\dot{q}$ について Taylor 展開[3]して、一次の項だけをとると、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) \mathrm{d}t = 0\,. \tag{12}$$

第2項で $\delta\dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$ を使って部分積分すれば

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, \mathrm{d}t = 0\,. \tag{13}$$

第1項はゼロ $(\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ から)、第 2 項は任意の変分 $\delta q(t)$ に対してゼロになるために、積分関数はゼロにならないと行けない：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,. \tag{14}$$

これは Euler-Lagrange 方程式　(7)、すなわち運動方程式である。

２つの追加コメント：

- 一般に「座標」の変数は多数あってもよいので、Lagrangian は $L(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t)$ で表す。そのときに、s 個の関数 $q_i(t)$ を独立に変分すればよい。そのときに、 Euler-Lagrange equation は次の s 個の方程式となる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)\,. \tag{15}$$

- 「座標」は普通の直交座標 $(x(t), y(t), z(t))$ であれば、運動エネルギーは常に次の形をする：

$$T = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2 \right) \tag{16}$$

[3] 2つの変数 x, y の関数 $f(x,y)$ があるとき、一次の項まで取り入れた Taylor 展開の公式は

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta x\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

本文では、変数 x, y に対応する物理量は $q(t)$, $\dot{q}(t)$ である。

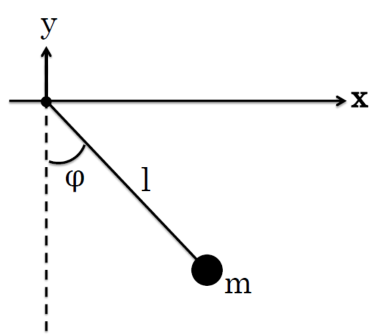
である。($a = 1, 2, \ldots$ は粒子の番号.) しかし、極座標などの変数へ変換すれば、運動エネルギーは一般に

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{17}$$

となり、係数 $m_{ij} = m_{ji}$ は一般に座標 q に依存する。(後で具体例を勉強する。)

Lagrangian と運動方程式について簡単な具体例:

1. 平面振子 (質点の質量 m, 軽い棒の長さ ℓ):



Lagrange の形式では、「一般化された座標」 $q(t)$ として質点の角度 $\varphi(t)$ をとる。質点の直交座標 (x, y) を ℓ, φ で表す:

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \sin\varphi(t) \Rightarrow \dot{x} = \ell\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \\ y(t) &= -\ell\cos\varphi(t) \Rightarrow \dot{y} = \ell\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

従って、Lagrangian は次のようになる: [4]

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy \\ &= \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

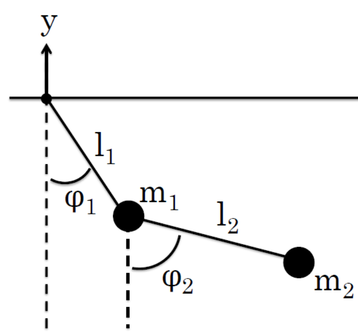
[4] ここで重力のポテンシャルエネルギーを $U = mgy$ で表し、基準点は $y = 0$ をとる。

Euler-Lagrange equation （運動方程式) は (14) より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$
$$\Rightarrow \ \ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi\,. \tag{18}$$

微小振動のときに $\sin\varphi \simeq \varphi$ を利用で、この微分方程式は簡単に解ける。微小振動でない場合について後で考える。

2. <u>2重平面振子</u> (質点の質量 m_1, m_2, 軽い棒の長さ ℓ_1, ℓ_2):



Lagrange の形式では、「一般化された座標」として角度 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ をとる。

$$x_1 = \ell_1\sin\varphi_1\,, \qquad y_1 = -\ell_1\cos\varphi_1$$
$$x_2 = \ell_1\sin\varphi_1 + \ell_2\sin\varphi_2\,, \qquad y_2 = -\ell_1\cos\varphi_1 - \ell_2\cos\varphi_2\,.$$

Lagrangian は次のようになる (各自で確認!):

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{y}_1^{\,2}\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^{\,2} + \dot{y}_2^{\,2}\right) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \\ &= \frac{m_1+m_2}{2}\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^{\,2} + m_2\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &+ (m_1+m_2)g\ell_1\cos\varphi_1 + m_2 g\ell_2\cos\varphi_2\,. \end{aligned}$$

微小振動 ($\varphi_1 << 1$, $\varphi_2 << 1$) の場合は運動方程式は簡単に得くことができる。（後で勉強する。）