(II) 対称性と保存則

エネルギー、運動量、角運動量の保存則を Lagrangian の対称性から直接導くことができる。その内容は Noether の定理 と呼ばれている。(Emmy Noether, 1882-1935, ドイツ、アメリカの数学者・物理学者.)

1. 時間の一様性 (homogenity of time) $\Leftrightarrow$ エネルギーの保存側:
   閉じた物理系では、時間の「原点」(時刻 $t=0$ の定義) は任意であるので、Lagrangian は時間に陽に依存しない (no explicit time dependence of L)：
   $$L(q,\dot{q},t) \equiv L(q,\dot{q}) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$
   ここで「座標」の変数 (q) および「速度」の変数 ($\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$) 多数あってもよいので、 $L(q_1, q_2, \ldots; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots) \equiv L(q,\dot{q})$ で表した。
   $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ を使って、Lagrangian を t について全微分すれば次のようになる：
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right).\end{aligned}$$
   ただし、上記の 2 番目の等式では Euler-Lagrange 方程式 (運動方程式) を使った。従って、上式から
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{const} \tag{1}$$
   が得られる。すなわち、式 (1) の左辺は保存量である。

Lagrangian は $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ であり、運動エネルギー T が速度 $\dot{q}$ の2次関数である:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

それを使って、次式が得られる：

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2\,T$$

従って、$L = T - U$ を使って、保存則 (1) は次のようになる：

$$\begin{aligned} & 2\,T - (T - U) = \text{const} \\ & \quad \Rightarrow T(\dot{q}, q) + U(q) = \text{const} \equiv E\,. \end{aligned} \tag{2}$$

それは<u>エネルギーの保存則</u>である: 全力学的エネルギー $E = T + U$ は保存される。

2. <u>空間の一様性 (homogenity of space) ⇔ 運動量保存則</u>

座標系の「原点」の定義は任意である。すなわち、全ての粒子の座標を任意の微小ベクトル $\vec{\epsilon}$ で平行移動しても、Lagrangian $L = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots)$ および運動方程式が不変である：$\vec{r}_a \to \vec{r}_a + \vec{\epsilon}$ のとき、Lagrangian の変化は

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a = \vec{\epsilon}\cdot\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Euler-Lagrange equation (運動方程式) を使えば、上式から

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \tag{4}$$

が得られる。(ただし $\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_a$ は粒子 a の速度である。) 式 (4) から、全運動量が保存量であることが分かる：

$$\vec{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a \vec{p}_a = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

ここで $L = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$ を使った。粒子1個の運動量 $\vec{p}_a$ を次のように定義した：

$$\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = m_a \vec{v}_a\,. \tag{6}$$

全運動量の保存則についての追加コメント：

- 式 (3) は Newton の第3法則に等しい。すなわち、$L = T(\dot{q}) - U(q)$ を使って、

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = -\sum_a \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a = 0\,. \tag{7}$$

  ここで粒子 a に働く力 $\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ を導入した。

- 式 (5) から、1個の粒子の運動量は $\vec{p}_a = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$ であるから、粒子 a の Euler-Lagrange equation (運動方程式)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \tag{8}$$

  は次のように表すことができる：

$$\dot{\vec{p}}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_a\,. \tag{9}$$

  すなわち、運動量の時間変化率は力である。

- 全運動量の保存 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}=0$ を使って、系の質量中心の速度 $\vec{V}$ （系全体の速度）も保存量であることが分かる：$\mu=\sum_a m_a$ は物理系の全質量とすると、

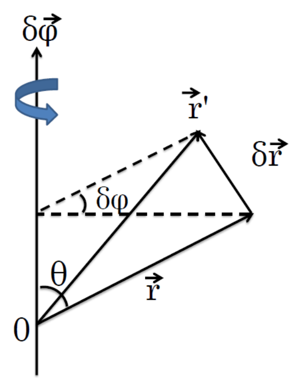
$$\vec{V} \equiv \frac{\vec{P}}{\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R} = \mathrm{const} \tag{10}$$

$$\text{where} \qquad \vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\mu}\,. \tag{11}$$

3. <u>空間の等方性 (isotropy of space) ⇔ 角運動量の保存則</u>:

座標系の原点を決めても、軸の向きは任意である。すなわち、全ての粒子の位置ベクトルを任意の微小ベクトル $\delta\vec{\varphi}$ で回転しても、系の Lagrangian および運動方程式は不変である。ただし、回転軸の方向は $\delta\vec{\varphi}$ の方向であり、回転の角度は $\delta\vec{\varphi}$ の大きさである。

先ず、1個の粒子の位置ベクトル $\vec{r}$ を $\delta\vec{\varphi}$ で回転すれば、図のようになる [1]



回転後の位置ベクトルを $\vec{r}'=\vec{r}+\delta\vec{r}$ と書くと、この図から次のことが分かる：(i) $\delta\vec{r}$ の方向は回転軸 $\delta\vec{\varphi}$ および $\vec{r}$ に

[1] この図では、元々の座標べトる $\vec{r}$ および回転軸 $\delta\vec{\varphi}$ は紙面内、位置ベクトルの変化 $\delta\vec{r}=\vec{r}'-\vec{r}$ は紙面に垂直である。

垂直である。(ii) $\delta\vec{r}$ の大きさは $\delta r = r\sin\Theta\,\delta\varphi$ である。その 2 つのことを表す式は次のようになる：

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}\,. \tag{12}$$

同じ関係式は粒子の速度ベクトルについて $\vec{v}' = \vec{v} + \delta\vec{v}$ についても成り立つ：

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{v}\,. \tag{13}$$

「回転の元で Lagrangian は不変である」要請を式で表すと

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial\vec{v}_a}\cdot\delta\vec{v}_a\right) \equiv 0 \tag{14}$$

となる。ここで式 (6) および (9) を使って、

$$\sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_a) + \vec{p}_a\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{v}_a)\right) = 0\,.$$

上式を変形すれば、

$$\delta\vec{\varphi}\cdot\sum_a\left(\left(\vec{r}_a\times\dot{\vec{p}}_a\right) + (\vec{v}_a\times\vec{p}_a)\right) = \delta\vec{\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a(\vec{r}_a\times\vec{p}_a) = 0\,. \tag{15}$$

それは任意の微小ベクトル $\delta\vec{\varphi}$ について成り立つために、次の物理量 (<u>全角運動量</u>) は保存量であることが分かる [2]:

$$\vec{M} = \sum_a(\vec{r}_a\times\vec{p}_a) = \sum_a\vec{M}_a = \mathrm{const}\,. \tag{16}$$

角運動量保存則についての追加コメント：

- 角運動量の値は座標系原点の取り方に依存するので、基準点を定義しなければならない。例えば、全ての粒子の位置ベクトルを $\vec{a}$ だけずらすと、$\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{a}$ から

$$\vec{M} = \sum_a(\vec{r}_a\times\vec{p}_a) = \sum_a(\vec{r}'_a\times\vec{p}_a) + \left(\vec{a}\times\sum_a\vec{p}_a\right) = \vec{M}' + \left(\vec{a}\times\vec{P}\right)\,. \tag{17}$$

[2] この講義では $\vec{M}$ は角運動量を表している。普通の力学では文字 L を使うことが多いが、解析力学ではm字 L が Lagrangian を表している。

ただし $\vec{M}' = \sum_a \vec{r}'_a \times \vec{p}_a$ で定義した。

外場がある場合の対称性と保存則の破れ:

外場（例えば重力、外力など）の影響をポテンシャルエネルギー U の中に埋め込むことが可能だが、そのため対称性が破られることが多い。

- 時間に依存する外場： $U(t)$ は時間に陽に依存すれば、$\partial L/\partial t \neq 0 \Rightarrow$ 時間の一様性がない $\Rightarrow$ 力学的エネルギーの保存則が成り立たない。
- 空間の一様性（並進対称性）は破られている場合は、一般に運動量保存が成り立たない。ただ、ある特別な方向に沿った並進対称性が残る場合は、その方向の運動量成分は保存される。

  具体例： (i) ボールが壁に衝突する：壁の方向に対する並進対称性が残る $\Rightarrow$ 壁の方向の運動量成分が保存される。それに垂直な運動量成分は保存されない。
  (ii) 一様な重力場 (z 方向): $U = mgz$. そのとき、z 方向に対する並進対称性がなくなり、 x, y 方向の対称性が残る。$\Rightarrow$ P_z は保存量ではないが、 P_x, P_y は保存される。
- 空間の等方性（回転対称性）が破られている場合は、一般に角運動量保存が成り立たない。ただ、ある特別な軸の回りの回転対称性が残る場合は、その軸方向の角運動量の成分は保存される。
  具体例：(i) 一様な重力場 (z 方向): z 方向に対する回転

対称性が残るが、x, y 方向の回転対称性がない　$\Rightarrow M_z$ は保存量であるが、 M_x, M_y は保存量ではない。
(ii) 球対称な外場 (例えば $U \propto 1/r$). 原点を通る任意の軸回りに回転対称性がある $\Rightarrow$ 原点に対する角運動量 $\vec{M}$ (3 つの成分）が保存される。