(III) ２体問題および Kepler の問題

1．2個の粒子の Lagrangian:

ここで、2個の粒子の間にポテンシャルエネルギー $U(r)$ が働く場合について考える。ただし $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ は粒子間の距離である。この系の Lagrangian は、$L = T - U$ より

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(r) \tag{1}$$

ここで質量中心の座標 $\vec{R}$ および粒子間の距離 $\vec{r}$ を次のように導入する：

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{3}$$

Lagrangian (1) を $\vec{R}, \vec{r}$ で表すと次のようになる：

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \tag{4}$$

ただし、全質量 $\mu = m_1 + m_2$ および「換算質量」(reduced mass)

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{5}$$

を使った。中心座標 $\vec{R}(t)$ に対する Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0$$

の解が

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t \tag{6}$$

となる。ただし $\vec{R}_0, \vec{V}$ は定数であるので、式 (6) は質量中心の等速直線運動を表している。

「質量中心系」(center of mass system) が、質量中心が移動しない ($\vec{V} = 0$) 物理系として定義する。従って、その系での Lagrangian が (7) より

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \tag{7}$$

となり、質量 m をもつ「仮想粒子」が中心ポテンシャル $U(r)$ の中を運動する場合を表している。$\vec{r}(t)$ に対する運動方程式を解けば、$\vec{r}_1(t)$ および $\vec{r}_2(t)$ が、式 (2), (3）および (6) から分かる。すなわち、ポテンシャルは距離だけの関数であれば、2体問題は 1 体問題へ帰着できる。

2. Kepler の問題:

質量 m の粒子（物体）が引力ポテンシャル $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ の中を運動する問題について考える。中心 $(r = 0)$ に対する角運動量 $\vec{M} = (\vec{r} \times \vec{p})$ は保存量であるので、$\vec{M}$ の方向を z 方向に固定することができる： $\vec{M} = (0, 0, M)$. そのときに、物体の軌道 $\vec{r}(t)$ は (x, y) 平面内にとどまってる。

円筒座標 $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 0$ を使って Lagrangian (7) を表す：

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\alpha}{r} \tag{8}$$

となる。$r(t)$ および $\varphi(t)$ についての運動方程式 (Euler-Lagrange equation) は次のようになる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \ \Rightarrow\ m\,\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \tag{9}$$

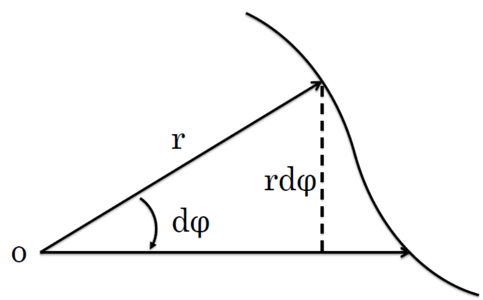
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0$$
$$\Rightarrow\; mr^2\dot{\varphi} = M = \mathrm{const}\,. \tag{10}$$

ただし、 $M = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = mr^2\dot{\varphi}$ を使った。

角度 $\varphi(t)$ についての運動方程式 (10) が角運動量の保存則を表し、Kepler の第2法則と等価である：図のように、軌道上の2点（無限に近い）の位置ベクトルがかく面積は $\mathrm{d}f = \dfrac{r^2}{2}\mathrm{d}\varphi$ であるので、面積速度は $\dot{f} = \dfrac{r^2}{2}\dot{\varphi}$ となる。すなわち

$$\dot{f} = \frac{M}{2m} \tag{11}$$

(Kepler の第2法則。)

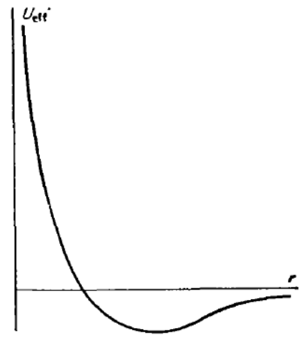


運動方程式 (9) および (10)を直接解くこともできるが、ここでエネルギーと角運動量の保存則を使って解くことにする。全力学的エネルギーは、$M = mr^2\dot{\varphi}$ を使って、次のように表すことができる：

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{12}$$

従って、「有効ポテンシャル」$U_{\mathrm{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$ は次の図のような形をする。$E < 0$ の場合は物体の運動は有界で

あり、$r_{\min} < r < r_{\max}$ の範囲内にとどまる。（束縛状態。）$r_{\min}$ と $r_{\max}$ のところで $\dot{r} = 0$ となる。 $E > 0$ の場合は物体の運動は有界でなく、散乱状態を表している。



式 (12) を使って、$\dot{r}$ を E, M で表す：

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}\,. \tag{13}$$

この式の符号について： $r(t)$ が $r_{\min} \to r_{\max}$ の方へ増加する場合は $\dot{r} > 0$ であり、$+$ 符号をとる。 $r(t)$ が $r_{\max} \to r_{\min}$ の方へ減少する場合は $\dot{r} < 0$ であり、$-$ 符号をとる。以下の式では $+$ の符号をとる。

式 (13) を変数分類と積分すれば

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \mathrm{const} \tag{14}$$

が得られる。上記の式は t と r との関係（すなわち $r = r(t)$）を与えている。一方、角運動量の保存則 (10) を $\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{mr^2}\mathrm{d}t$ で表し、(13) から得られる $\mathrm{d}t$ を代入し積分すれば

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}} + \mathrm{const} \tag{15}$$

となり、r と φ との関係式 (すなわち軌道の形 $r = r(\varphi)$）を与えている。

ここで $U=-\frac{\alpha}{r}$ と $E<0$ の場合に軌道の関係式 (15) を具体的に求めよう。変数変換 $s=1/r$ を使って、この積分は次のように書ける：

$$\begin{aligned}\varphi &= -\int\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2}+\frac{2m\alpha}{M^2}s-s^2}}+\mathrm{const}\\ &= -\int\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2}+\frac{m^2\alpha^2}{M^4}-\left(s-\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2}}\,. \end{aligned}\tag{16}$$

ただし (15) の const=0 をとった。（角度の基準点の選び方。）更に変数変換 $u=s-\frac{m\alpha}{M^2}$ を使えば、公式 $(a>0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}}=-\cos^{-1}\frac{u}{a}\tag{17}$$

を適用できる。従って、

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{s-\frac{m\alpha}{M^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2}+\frac{m^2\alpha^2}{M^4}}}\tag{18}$$

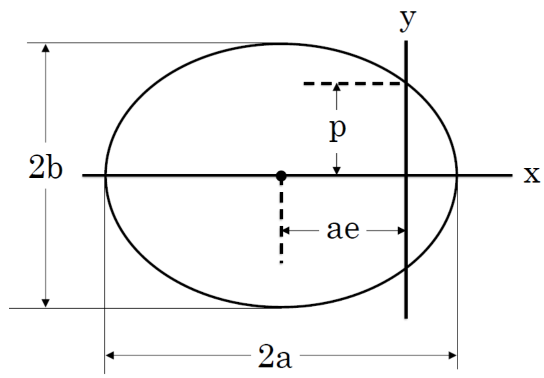
となる。$s=1/r$ を使って、上式から

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}}\left(\frac{M^2}{m\alpha r}-1\right)\equiv\frac{1}{e}\left(\frac{M^2}{m\alpha r}-1\right)\Rightarrow\\ e\,\cos\varphi &= \frac{M^2}{m\alpha r}-1\Rightarrow 1+e\cos\varphi=\frac{p}{r}\,. \end{aligned}\tag{19}$$

ここで e, p を次のように定義した：

$$e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}\,,\qquad p=\frac{M^2}{m\alpha}\,.\tag{20}$$

式 (19) は図のように、楕円を表している。(Kepler の第1法則。）ただし、座標系の原点は楕円の焦点、 $\varphi=0$ は近日点 (perihelion) に対応する。



楕円の通径 (parameter) p と離心率 (eccentricity) e と通常の長半軸 a と短半軸 b との関係は

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}\,, \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

となる。逆に a, b を p, e で表すと次のようになる：

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}\,, \tag{21}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}\,. \tag{22}$$

楕円についての追加説明：座標系の原点として楕円の中心をとる場合は、式 (19) は通常の楕円の公式になる：

$$x' = x + a\,e\,, \qquad y' = y \quad \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\,.$$

（それを各自で確認して下さい.)

練習問題：地球の軌道はほとんど円である。($e = 0.0167 \simeq 0$) 。そのときに地球の全力学的エネルギー E および角運動量の大きさ M を求めよ。ただし、次の数値を使えよ：

$$G \;=\; 6.67\times 10^{-11}\mathrm{N\ m^2/kg^2}\,, \qquad m = 5.98\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

$$\mathcal{M} \ = \ 1.98 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}\,, \qquad r = 1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}\,.$$

ただし G は重力定数、$\mathcal{M}$ は太陽の質量、r は地球と太陽の距離である。

Kepler の第3法則を導こう：第2法則 (11) を時間について定積分 ($t=0$ から $t=T$ まで) すれば $f = \dfrac{TM}{2m}$ が得られる。ただし T が周期、 f が軌道の面積 $f = \pi\, a\, b$ である。従って、(21), (22) を使えば

$$T = \frac{2m}{M}\pi ab = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}\,. \tag{23}$$

上記の2番目の形は $T \propto a^{3/2}$ を表し、Kepler の第3法則である。

練習問題：地球の軌道について、上で求めた $|E|$ の値を (23) に代入して、周期は 1 年であることを確認せよ。

最後のコメント: 座標の時間変化 $x(t), y(t)$ は式 (14) から求めることができる。結果が教科書の p.46, 式 (15.10), (15.11) で与えられる。