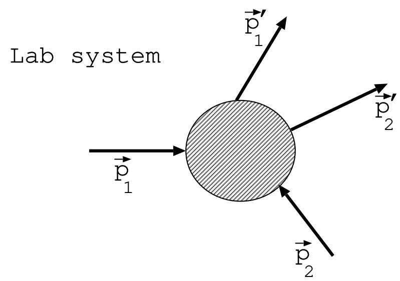
## IV. 粒子の弾性散乱（弾性衝突)

ここで2個の粒子（物体）の弾性散乱について考えよう。先ず、運動量と運動エネルギーの保存則だけで何が言えるかについて考えて、その後は相互作用を用いて散乱角度を求める。

### 1. 運動量とエネルギーの保存則、質量中心系




実験室系 (Laboratory system) での運動量と運動エネルギーの保存：

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \tag{1}$$
$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \tag{2}$$

ここで先ず質量中心系へ変換する。前の講義 (Sect. III) で勉強した通り、二つの物体の位置ベクトル $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ を、質量中心ベクトル

$$\vec{R} = \frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

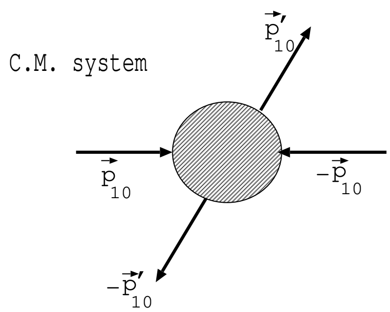
および距離 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ を使って次のように表される：

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{aligned} \tag{4}$$

「質量中心系」では $\vec{R}$ が移動しないので、$\dot{\vec{R}} = 0$. 従って、(4) の時間微分をとると、質量中心系では [1]散乱前の粒子の速度を次のように表すことができる：

$$\begin{aligned}\vec{v}_{10} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \\ \vec{v}_{20} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$ は散乱前の相対速度である。式 (5) から、質量中心系では散乱の前の全運動量はゼロであることが分かる：$\vec{p}_{20} = -\vec{p}_{10}$. 運動量保存のため、散乱後の全運動量もゼロでなければならないので、$\vec{p}\,'_{20} = -\vec{p}\,'_{10}$.



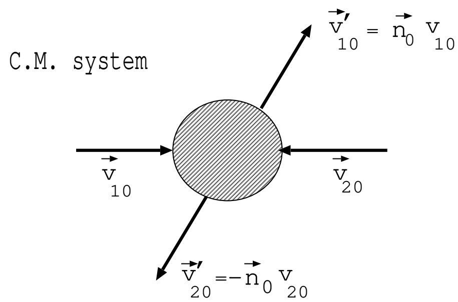

エネルギー保存則 (2) のため、質量中心系での運動量の大きさは変わらない：$p'_{10} = p_{10}$. 従って、粒子 1 の散乱後の運動量は次のように表される：

$$\vec{p}\,'_{10} = \vec{n}_0\, p_{10} \tag{6}$$

ここで $\vec{n}_0$ は任意の方向の単位ベクトルである。従って、質量中心系では、散乱過程では粒子 1 の運動量ベクトルは回転され、大きさは変わらない。（粒子 2 も同様。）

粒子の速度ベクトルについても同様なことが言える：質量中心系では、粒子 1 の速度ベクトルが回転され、大きさは変わらない。（粒子 2 も同様。）

[1]質量中心系でのベクトルを下付きの 0 で表す。




従って、質量中心系では、散乱前の速度は (5) であるので、散乱後の速度は

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{10} &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{n}_0\,v \\ \vec{v}'_{20} &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{n}_0\,v \end{aligned} \tag{7}$$

で表される。
実験室系へ戻すために、式 (7) の右辺に質量中心の速度（即ち式 (3) の時間微分）

$$\dot{\vec{R}} = \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{m_1+m_2} \tag{8}$$

を加えなければならない。従って、実験室系での散乱後の速度は

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,v\,\vec{n}_0 + \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{m_1+m_2} \\ \vec{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,v\,\vec{n}_0 + \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{m_1+m_2} \end{aligned} \tag{9}$$

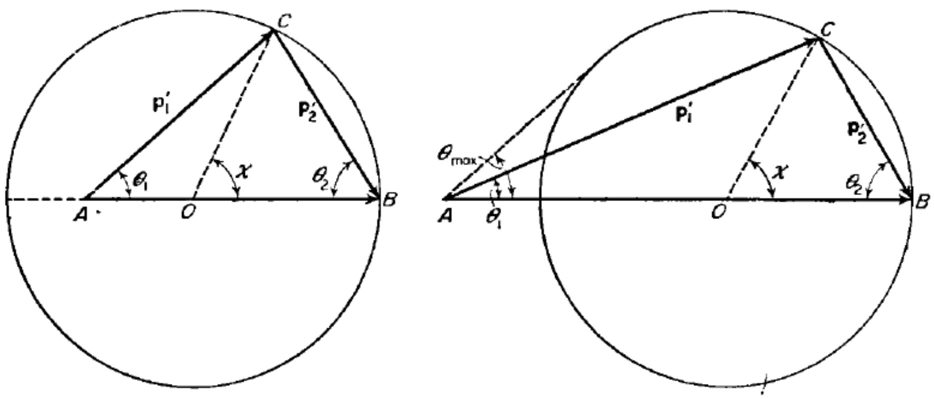
となる。それ以上はエネルギーと運動量保存則だけで分からない。即ち、単位ベクトル $\vec{n}_0$ が相互作用に依存する。勿論、相互作用が分かれば $\vec{n}_0$ は計算できる。
式 (9) を運動量で表すこともできる。そのため、式 (9) にそれ

ぞれ $m_1, m_2$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_1^{\,\prime} &= m\,v\,\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \\
\vec{p}_2^{\,\prime} &= -m\,v\,\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる。ここで「換算質量」 $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ を定義した。
以後は粒子 2 が散乱前に実験室系で静止している場合について考えよう: $\vec{v}_2 = \vec{p}_2 = 0$. 式 (10) を次の図で表すことができる：

$$
\tan\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \qquad \theta_2 = \tfrac{1}{2}(\pi - \chi). \tag{17.4}
$$




(a) $m_1 < m_2$ (b) $m_1 > m_2$

$\vec{AB} = \mathbf{p}_1$ ; $AO/OB = m_1/m_2$

即ち、式 (10) が次のように表されている：

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_1^{\,\prime} &= \vec{OC} + \vec{AO} \\
\vec{p}_2^{\,\prime} &= \vec{CO} + \vec{OB}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

円の半径が $OC = OB = mv_1 = m_2/(m_1+m_2)p_1$ である。円の半径および点 $A, B$ が固定、円周上の点 $C$ が任意の位置にある。角度 $\Theta_1, \Theta_2$ が、入射方向 ($\vec{p}_1$ の方向）からはかった衝突後の散乱角を表している。角度 $\chi$ ($\vec{n}_0$ の方向) は、質量中心系での粒

子 1 の散乱角度である。$\Theta_1+\Theta_2$ は散乱後の粒子との間の角度であり、 $m_1<m_2$ の場合は $\Theta_1+\Theta_2>\pi/2$ であるが、$m_1>m_2$ の場合は $\Theta_1+\Theta_2<\pi/2$.
この図を使って、実験室系での散乱角度 $\Theta_1,\Theta_2$ と中心系での散乱角度 $\chi$ との関係を読み取ることができる：$C$ から下ろした垂直線と $AB$ との交点を $X$ とすれば

$$\tan\Theta_1=\frac{CX}{AO+OX}$$

ここで $\sin\chi=CX/(mv_1)$, $\cos\chi=OX/(mv_1)$ を使うと

$$\tan\Theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi} \tag{12}$$

また、二等辺三角形 $OBC$ から $\chi/2+\Theta_2=\pi/2$ が分かるので、

$$\Theta_2=\frac{\pi-\chi}{2} \tag{13}$$

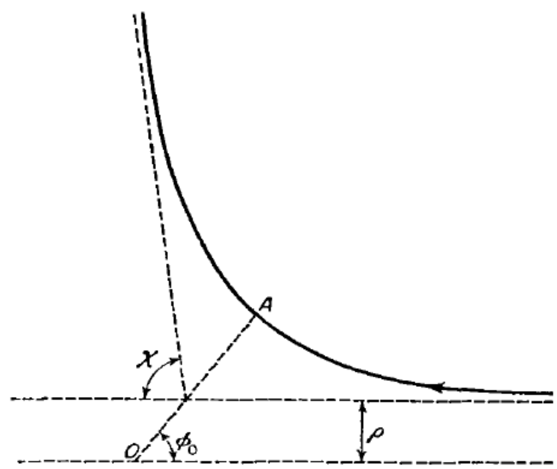
散乱後の粒子の速度の大きさを (9) を使って $\chi$ の関数として求めることができる。式 (9) で $\vec{v}_2=0$, $v_1=v$ および $\vec{v}_1\cdot\vec{n}_0=\cos\chi$ を使うと次のようになる：

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}\,v \tag{14}$$

$$v_2' = \frac{2m_1v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2} \tag{15}$$

## 2. 散乱角度を相互作用から求める

質量中心系での散乱角度 $\chi$ がエネルギーと運動量保存だけで決まらないので、ここで2粒子間の相互作用 $U(r)$ を取り入れて考えよう。前の講義 (Sect. III) で勉強した通り、質量中心の運動を分けてから、2粒子の散乱過程を「仮想的な1粒子が固定されたポテンシャル $U(r)$ での散乱過程」へ帰着できる。その仮想的な粒子の質量は換算質量 $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ である。




前の講義 (Sect. III) のように、角運動量保存のためにこの散乱過程が一つの平面内に起こり、ここで $(x, y)$ 平面とする。2次元の極座標 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ を導入して、角運動量の大きさ

$$M = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \tag{16}$$

で表される。図の $\rho$ が「衝突パラメター」と呼ばれ、力がないとして粒子が通りぬけるときの中心からの最短距離である。即ち、入射粒子の無限遠での速度を $v_\infty$ とすれば、その角運動量（図面に垂直）の大きさ $(M)$ およびエネルギー $(E)$ が

$$M = m\rho v_\infty\,, \qquad E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \tag{17}$$

で表される[2]。求めたい散乱角度 $\chi$ と図の角度 $\phi_0$ との関係は

$$\chi = \pi - 2\phi_0 \tag{18}$$

散乱角度 $\phi_0$ を求めるために、前の講義 (Sect. III) の式 (12) のエネルギーの公式を使う：

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{19}$$

最短距離 $r_0$ のところで $\dot{r} = 0$ となるので、 (19) から

$$\frac{M^2}{2mr_0^2} + U(r_0) = E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \tag{20}$$

が成り立つ。 $\varphi$ と $r$ との間の関係（粒子の軌道）は前の講義で次のように求めた（Sect. III, 式 (15)):

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}} + \mathrm{const} \tag{21}$$

従って、粒子の距離が $r_0$ から $\infty$ までに（もしくは $\infty$ から $r_0$ までに) 変化するときに、図の角度 $\phi_0$ は次のように表される：

$$\phi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{22}$$

上式から角度 $\phi_0$ を求めると、散乱角度 $\chi$ は次式から分かる：

$$\chi = \pi - 2\phi_0 \tag{23}$$

式 (22), (23) から、2つの粒子の中心系での散乱角度 $\chi$ を求めることができる。実験室系 ($m_1$ の粒子が $v_1$ で入射し、$m_2$ の

[2] Kepler の問題のときに使った運動方程式の「積分定数」$E$, $M$ の代わりに、ここで (17) のように $v_\infty$, $\rho$ を使用した方が便利である。

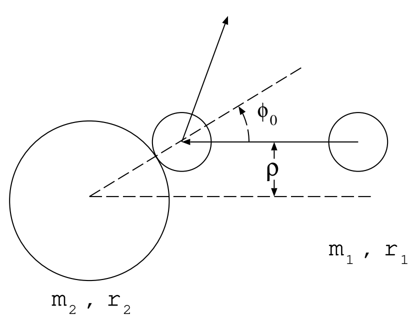
粒子が静止）に適用するため、次の点に注意する：(i) 上式の速度 $v_\infty$ を実験室系での入射粒子速度 $v_1$ に置き換える [3]。(ii) 実験室系での散乱角度 $\Theta_1, \Theta_2$ が

$$\tan\Theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \qquad \Theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2} = \phi_0 \tag{24}$$

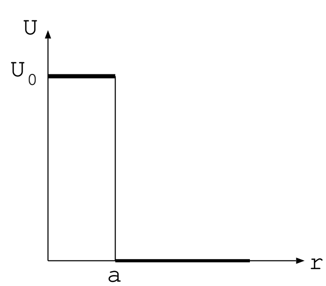
から決まる。

## 具体例A：剛体球の衝突

図のように、半径 $r_1$, 質量 $m_1$ の剛体球が速さ $v_1$, 衝突パラメター $\rho$ で入射し、半径 $r_2$, 質量 $m_2$ の静止していた剛体球に衝突する。




そのときの「剛体ポテンシャル」 $U(r)$ が次の図で表されている。ただし、$U_0 = \infty$ で、$a = r_1 + r_2$ である。




[3] その理由：中心系でのエネルギーが $E = (m/2)\,v_\infty^2$ が $E = (m_1/2)\,v_1^2 - (M/2)\,V^2$ と一致しなければならないので、$v_1 = v_\infty$ が分かる。

式 (22) に $M = m\rho v_\infty,\ E = (m/2)\,v_\infty^2,\ r_0 = a$ を代入すれば

$$\phi_0 = \rho \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} \tag{25}$$

となる。変数変換 $s = \rho/r$ を行うと、この積分が次のように計算できる [4] ：

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \int_0^{\rho/a} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1 - s^2}} = \sin^{-1} \frac{\rho}{a} \\ &\Rightarrow \ \rho = a \sin \phi_0 \end{aligned} \tag{26}$$

従って、中心系での散乱角度が式 (23) から

$$\chi = \pi - 2\phi_0 = 2 \cos^{-1} \frac{\rho}{a} \tag{27}$$

実験室系へ戻す：式 (24) から $\Theta_2 = \phi_0 = \sin^{-1} \frac{\rho}{a}$. 角度 $\Theta_1$ は (24) より計算できるが、$m_1 = m_2$ の場合は簡単になる：

$$\begin{aligned} \tan \Theta_1 &= \frac{\sin \chi}{1 + \cos \chi} = \tan \frac{\chi}{2} \\ &\Rightarrow \ \Theta_1 = \frac{\chi}{2} = \cos^{-1} \frac{\rho}{a} \end{aligned} \tag{28}$$

$m_1 = m_2$ の場合は、衝突後の速さが (14), (15) より次のようになる（各自で確認!)：

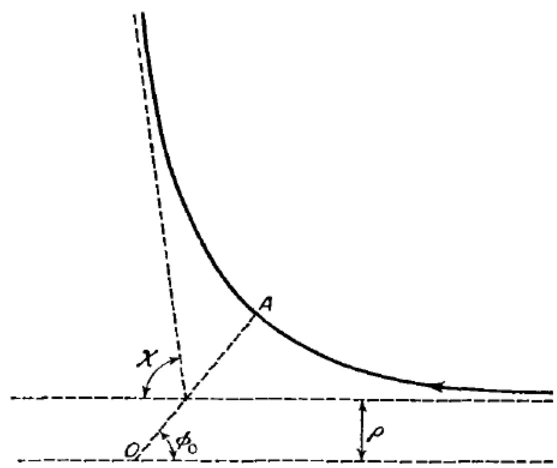
$$v_1' = v_1 \frac{\rho}{a}, \qquad v_2' = v_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}$$

[4] 勿論、式 (26) は直接上の図（2つの剛体球の散乱の図）からも分かる。

## 具体例B：重力ポテンシャルによる散乱

以下は $U(r)=\frac{\alpha}{r}$ について考えよう。ただし定数 $\alpha$ が正でも負でもよい。式 (22) を思い出して、

$$\phi_0=\int_{r_0}^{\infty}\frac{\frac{M}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}} \tag{29}$$




積分 (29) での定数 $E,M$ の代わりに (17) を使って $v_\infty$ と衝突パラメター $\rho$ を使う。$U=\frac{\alpha}{r}$ を代入し、変数変換 $s=\frac{\rho}{r}$ を行うと

$$\phi_0 \;=\; \int_0^{\rho/r_0}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-\left(s+c\right)^2+c^2}}$$

ただし $c$ を次のように定義した：

$$c=\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}$$

積分を実行するために、公式 $(a>0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}}=-\cos^{-1}\frac{u}{a}$$

を使う。更に最短距離 $r_0$ の定義 (20) から

$$\frac{\rho}{r_0} + c = \sqrt{1+c^2}$$

も使用すれば、結果が次のようになる：

$$\phi_0 = -\cos^{-1}\frac{u}{\sqrt{1+c^2}}\Big|_{u=c}^{u=\sqrt{1+c^2}} = \cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \tag{30}$$

散乱角度は $\chi = \pi - 2\phi_0$ であるので、式 (30) から散乱角度が決まる。 式 (30) は次のように書き換えることができる [5] ：

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2} \tag{31}$$

この式が衝突パラメター（及び角運動量）と散乱角度との関係を最も簡単に表している。

注意：実際の散乱条件では、衝突パラメター $\rho$ は無限大になることがないから、散乱角度 $\chi$ がゼロになることができない。

上記の結果が質量 $m$ の粒子が固定されたポテンシャル $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ による散乱角度を表しているが、２粒子散乱の場合は、上記の角度 $\chi$ が質量中心系での散乱角度である。実験室系 ($m_1$ の粒子が $v_1$ で入射し、質量 $m_2$ の静止している粒子と衝突）の場合には以前の公式 (18), (13), (14), (15) を使う。ただし、上式の速度 $v_\infty$ を実験室系での入射粒子速度 $v_1$ に置き換える。

<u>練習問題</u>: $m_1 << m_2$ および $m_1 = m_2$ の場合、散乱後の速さ $v_1'$, $v_2'$ および散乱角度 $\Theta_1$, $\Theta_2$ を、入射物体の速さ $v_1$ および衝突パラメター $\rho$ の関数として求めなさい。

[5] $\cot\alpha \equiv \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$