VII. Lagrangian, Hamiltonian **および運動方程式の求め方の具体例：**

電磁場中の粒子の運動

1. 一般に、電場 $\vec{E}$ および磁場 $\vec{B}$ を「スカラーポテンシャル」$\phi(\vec{r},t)$ および「ベクトルポテンシャル」$\vec{A}(\vec{r},t)$ を使って次のように表すことができる：

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}} \tag{1}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2}$$

そのとき、次の2つの Maxwell 方程式が自動的に満たされている：

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

残りの2つ Maxwell 方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

であるが、以下では $\vec{E}$, $\vec{B}$ は「外場」として与えられていると考える。即ち、その「外場」の中に運動する粒子が自分で作っている電場および磁場は無視できるとする。

2. 一様な電場 $\vec{E}$ および磁場 $\vec{B}$ に対するスカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルとして、例えば

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{E}\cdot\vec{r}, \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$$

を使うことができる。式 (1), (2) を満たしていることが直に確認できる。

3. 次の Lagrangian から導かれる Euler-Lagrange 方程式が、電磁場中の Newton の運動方程式と一致する [1]:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - e\,\phi(\vec{r}) + e\,\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}) \tag{3}$$

ただし e は粒子の電荷である。即ち、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{4}$$

が Newton の運動方程式

$$m\,\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{5}$$

と一致する。式 (5) の右辺は Lorentz 力である。

ここで (4) と (5) が一致することを確認しましょう：$\vec{A}(\vec{r})$ が粒子の位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の関数であることに注意すると、(4) の左辺は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{v} + e\vec{A}(\vec{r})\right) = m\,\ddot{\vec{r}} + e\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} \tag{6}$$

となる。式 (4) の右辺は

$$-e\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) + e\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) \tag{7}$$

である。ただし、式 (7) の2番目の項では、微分 ($\vec{\nabla}$) はベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ のみに作用するという意味である。式 (6) = 式 (7)、およびベクトル解析からの恒等式

$$\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \tag{8}$$

を使って Newton の運動方程式 (5) は出てくる。

4. Lagrangian (3) に対応する Hamlitonian を導くため、先ず粒子の座標 $\vec{r}$ に対する共役運動量 (canonical momentum) は [2]

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + e\vec{A} \tag{9}$$

[1] 以下では $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ とする。

[2] Sect. VI. では、一般化された座標 q に対応する共役運動量 p を $p = \partial L/\partial \dot{q}$ で定義した。

で表す。この「共役運動量」 $\vec{p}$ が「力学的運動量」 $m\vec{v}$ と異ることに注意する[3]。式 (9) を使って、速度 $(\vec{v})$ を次のように $\vec{p}$ で表すことができる：

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) \tag{10}$$

従って、Sect. VI. で勉強した Legendre 変換を使って Hamiltonian を次のように求めることができる：

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\phi \tag{11}$$

次に、一様な電場と磁場のなかに運動する粒子の Newton 運動方程式 (5) の解を求める。座標系を次のようにとる：

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (0, 0, B) \\ \vec{E} &= \left(0, E_\perp, E_{||}\right) \end{aligned}$$

運動方程式 (5) を成分毎に分けて書くと、

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B \tag{12}$$

$$m\ddot{y} = eE_\perp - e\dot{x}B \tag{13}$$

$$m\ddot{z} = eE_{||} \tag{14}$$

式(14) から

$$z = \frac{1}{2}e\frac{E_{||}}{m}t^2 + v_{z0}t + z_0$$

が得られる。ただし v_{z0}, z_0 は定数。即ち、粒子が z 方向へ等加速度運動をする。
次に

$$u \equiv \dot{x}, \qquad v \equiv \dot{y}$$

[3]量子力学では、 $\vec{p}$ が演算子 $-i\hbar\vec{\nabla}$ になる。

を使って、式 (12), (13) を次のように書き変える：

$$\dot{u} = \omega v \tag{15}$$

$$\dot{v} = -\omega \left(u - \frac{E_\perp}{B} \right) \tag{16}$$

ただし $\omega \equiv \frac{eB}{m}$. 上式は時間について「非同次型」一次微分方程式である。従ってその一般解は、「同次型」方程式の一般解 + 「非同次型」方程式の特殊解である。

- 先ず「同次型」方程式は

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega v \\ \dot{v} &= -\omega u \end{aligned}$$

上式から $\ddot{u} = -\omega^2 u$ なので、同次型方程式の一般解は

$$u = C \cos(\omega t + \delta) \tag{17}$$

$$v = \frac{\dot{u}}{\omega} = -C \sin(\omega t + \delta) \tag{18}$$

ただし C, δ は定数.

- 「非同次型」方程式 (15), (16) の特殊解は

$$v = 0, \qquad u = \frac{E_\perp}{B}$$

- 従って、(15), (16) の一般解は

$$u = \frac{E_\perp}{B} + C \cos(\omega t + \delta) \tag{19}$$

$$v = -C \sin(\omega t + \delta) \tag{20}$$

となる。初期条件として、$t = 0$ のときの速度は x 方向にとる場合は $\delta = 0$, 即ち

$$u = \frac{E_\perp}{B} + C \cos \omega t \tag{21}$$

$$v = -C \sin \omega t \tag{22}$$

それを時間について積分して、$x(t)$, $y(t)$ についての解は

$$x(t) = \frac{E_\perp}{B} t - A \sin \omega t + x_0 \tag{23}$$

$$y(t) = -A \cos \omega t + y_0 \tag{24}$$

ただし $x_0, y_0, A = -C/\omega$ は定数. 初期条件として、$t = 0$ のときに $x(t = 0) = y(t = 0) = 0$ とすれば、 $x_0 = 0$, $y_0 = A$ をとる：

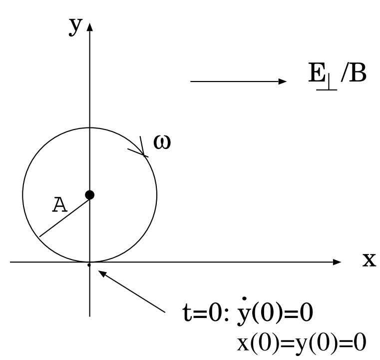
$$x = \frac{E_\perp}{B} t - A \sin \omega t \tag{25}$$

$$y = A (1 - \cos \omega t) \tag{26}$$

ここで粒子が描く曲線について考える。上記の $x(t)$, $y(t)$ との間に次の関係式が成り立つ：

$$\left(x - \frac{E_\perp}{B} t \right)^2 + (y - A)^2 = A^2 \tag{27}$$

これは (x, y) 平面で半径 A, 中心 $(E_\perp t/B \, , A)$ の円の方程式である。即ち、円の中心は速度 $E_\perp/B$ で x 方向に運動する。

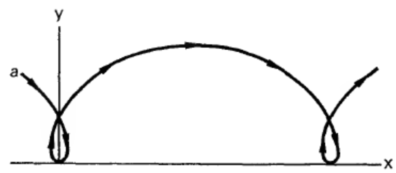


ここで

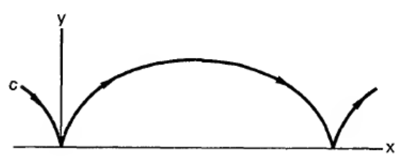
$$\dot{x}= E_\perp/B - A\omega\cos\omega t$$

に注意しながら、次の場合分けをする：

1. $\dfrac{E_\perp}{B} - A\omega < 0$: その場合は $\dot{x}$ が（時間の関数として）正にも負にも成りうる：



2. $\dfrac{E_\perp}{B} - A\omega = 0$: その場合は $\omega t = 0, 2\pi, \ldots$ のときに $\dot{x}= 0$, それ以外のとき $\dot{x}> 0$:



3. $\dfrac{E_\perp}{B} - A\omega > 0$: その場合は $\dot{x}> 0$.