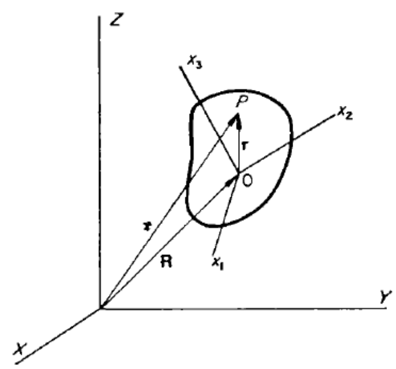
VIII. 剛体の運動

1.　座標系

剛体の運動（回転、並進運動など）を記述するために、図のように「静止座標系」 XYZ および剛体と固く結びついている「運動座標系」$x_1x_2x_3$ を利用する。



この講義では、運動座標系の原点 (O) は剛体の質量中心にとる。（その理由は後で分かる。） XYZ 系において、ある時刻で O の位置ベクトルを $\vec{R}$ とし、剛体の任意の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。図から

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r} \tag{1}$$

ただし、$\vec{r}$ は $x_1x_2x_3$ 系での P の位置ベクトルである。

剛体の運動 (ベクトル $\vec{r}$ の変化) を次の 2 つの運動に分けて記述する：

- 質量中心 O の運動（外力がない場合は等速度運動、外力がある場合は回転運動でも有り得る）
- 質量中心 O のまわりの回転運動

すなわち、点 P の微小変化は次のように表す：

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{R} + (\mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r}) \tag{2}$$

（Sect. II, 式 (12) に参照。）ただし $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ はある時刻での O の回りの回転軸方向とその回転角度を表している。式 (2) を $\mathrm{d}t$ で割り算すると、

$$\vec{v} = \vec{V} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \tag{3}$$

が得られる。ただし $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ は XYZ 系での P の速度、$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$ は XYZ 系での質量中心の速度, $\vec{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$ は質量中心 O の回りの角速度である。

注意：ある時刻での剛体の「角速度」$\vec{\Omega}$ は、運動座標系の選び方に関係なく、物理的明確な意味を持っている。すなわち、$\vec{\Omega}$ は運動座標系の選び方に依存しない。（直感的に理解できるが、証明について教科書 p. 122, 式(31.3)に参照。）例えば、質量中心の回りの角速度と「本当の回転軸」の回りの角速度は等価である。($\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$.)

2.　運動エネルギーと慣性モーメント

XYZ 系での剛体の運動エネルギーは $\sum \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$ で表される。ただし、剛体を質点の集合として見なし、全ての質点について和をとる。式 (3) を使って運動エネルギーは次のように表される：

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{\mu}{2}\vec{V}^2 + \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 \\ &= \frac{\mu}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

ただし $\mu = \sum m$ は全質量であり、質量中心 $\vec{R} = \left(\sum m\vec{r}\right)/\mu = \vec{0}$ を使った。

今後はベクトルの成分 $(i, j, k = 1, 2, 3)$ を使って (4) の回転部分（第2項）を表す。 $\Omega^2 = \sum_{i=1}^3 \Omega_i^2 \equiv \Omega_i^2$, $\vec{\Omega}\cdot\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i x_i \equiv \Omega_i x_i$ などを使って [1]

$$\begin{aligned} T_{\rm rot} &= \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i^2\, x_\ell^2 - \Omega_i x_i\, \Omega_k x_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_\ell^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m\left(x_\ell^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \end{aligned} \tag{5}$$

ここで和の記号 $(\sum)$ は質点についての和のみを表している（脚注 1 に参照)。なお、 δ_{ik} は Kronecker delta 記号であり、 $i = k$ のときに $\delta_{ik} = 1$, $i \neq k$ のときに $\delta_{ik} = 0$ である。従って、$\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$ が成り立つ。(5) の最後に剛体の「**慣性テンソル**」を定義した：

$$I_{ik} = \sum m\left(x_\ell^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \longrightarrow \int \rho(\vec{r})\left(x_\ell^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \mathrm{d}^3 r \tag{6}$$

最後の形は連続的な質量分布（密度 $\rho(\vec{r})$) に対応する。

この慣性テンソルを使って最終的に剛体の Lagranian $L = T - U$ が次のように表される：

$$L = \frac{\mu}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U \tag{7}$$

慣性テンソルは対称であり $(I_{ik} = I_{ki})$, 具体的な形は次のように

[1] この講義ノーとでは、ある公式の中の積において、に同じベクトル成分の番号 (i, j, k など）が2回出てくる場合は自動的に和をとることを約束する。即ち、ある積の中で i, j, k など2回出てくるときに和の記号 $(\sum_{i=1}^3$ など) を省略する。

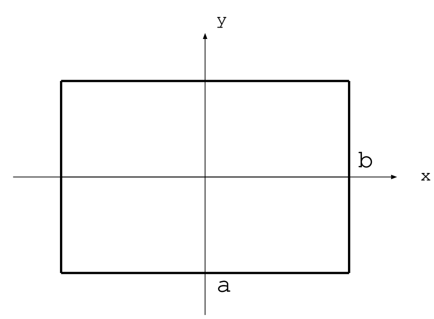
なる：

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m\left(y^2+z^2\right) & -\sum m\,x\,y & -\sum m\,x\,z \\ -\sum m\,y\,x & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum m\,y\,z \\ -\sum m\,z\,x & -\sum m\,z\,y & \sum m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} \tag{8}$$

I_{ik} は実数の対称テンソルなので、ある直交行列 $\mathcal{O}$ を使って対角化できる [2]。すなわち、運動座標系の軸 (x_1, x_2, x_3) の向きを適当にとれば慣性テンソルは対角の形となり、その対角成分 I_1, I_2, I_3 は**主慣性モーメント** と呼ばれている。

3. 主慣性モーメントの計算とその応用（具体例, 途中の計算は各自で確認）

(1) 長方形の薄い板（質量 M, 辺の長さは a, b）：



面積当たりの質量（密度）は $\rho = \frac{M}{ab}$ は一定で、$z = 0$ なので、主慣性モーメントの定義から

$$I_{xx} \;\equiv\; I_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\,\rho\,y^2 = \frac{M}{12}\,b^2$$

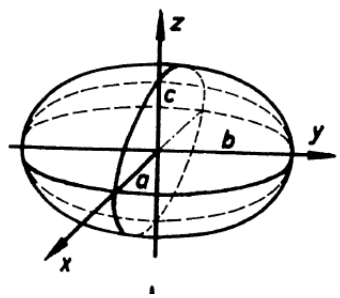
[2]多くの場合は、この対角化の操作は運動座標系の軸 (x_1, x_2, x_3) を物体の対称軸 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$へ回すことに対応する。具体的に、$\hat{x}_i = \mathcal{O}_{ii'} x_{i'} = x_{i'} \mathcal{O}^T_{i'i}$ とすると、直交変換後の慣性テンソル $\hat{I}$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} \hat{I}_{ik} &= \sum m\left(\hat{x}_\ell^2 \delta_{ik} - \hat{x}_i \hat{x}_k\right) = \mathcal{O}_{ii'}\left[\sum m\left(x_\ell^2 \delta_{i'k'} - x_{i'} x_{k'}\right)\right] \mathcal{O}^T_{k'k} \\ &= \left(\mathcal{O}\, I\, \mathcal{O}^T\right)_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$I_{yy} \;\equiv\; I_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, x^2 \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, \rho = \frac{M}{12}\, a^2$$

$$I_{zz} \;\equiv\; I_3 = \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, \rho\, \left(x^2 + y^2\right) = I_1 + I_2 = \frac{M}{12}\, \left(a^2 + b^2\right)$$

(2) 楕円体（質量 M, 半軸の長さは a, b, c):



楕円体内部は次式で表される：

$$V: \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$$

その体積は $V = \frac{4\pi}{3} a\, b\, c$ で、密度 $\rho = M/V$ は一定である。
極座標を使って、楕円体の内部を次式で表される:

$$x = ar \sin\Theta \cos\varphi\,, \qquad y = br \sin\Theta \sin\varphi\,, \qquad z = cr \cos\Theta$$

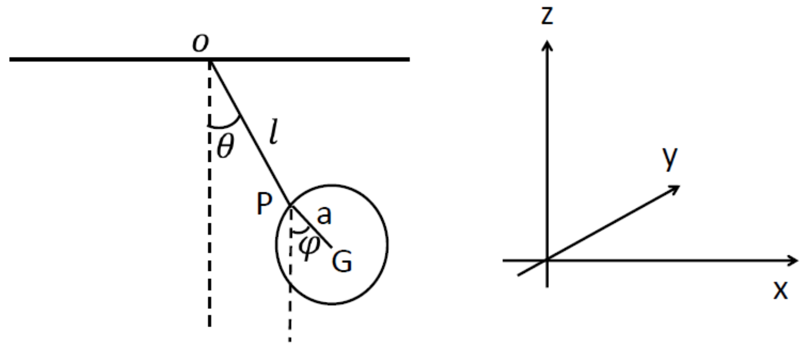
ただし $0 \leq r \leq 1$ は無次元の数である。($r = 1$ は楕円体の表面を表している。）それを使って計算すれば

$$I_{xx} \;\equiv\; I_1 = \int_V \mathrm{d}^3\mathrm{r}\, \rho \left(y^2 + z^2\right) = \frac{M}{5} \left(b^2 + c^2\right)$$

$$I_{yy} \;\equiv\; I_2 = \int_V \mathrm{d}^3\mathrm{r}\, \rho \left(x^2 + z^2\right) = \frac{M}{5} \left(a^2 + c^2\right)$$

$$I_{zz} \;\equiv\; I_3 = \int_V \mathrm{d}^3\mathrm{r}\, \rho \left(x^2 + y^2\right) = \frac{M}{5} \left(a^2 + b^2\right)$$

(3) 球 (半径 a) の慣性モーメントの応用例：



図のように、長さ ℓ の糸の上端を固定し、下端に質量 m, 半径 a の一様球を取り付け、鉛直面内で振動させる。図の角度 Θ, φ を使ってこの系の Lagrangian を導く。

図のような座標軸をとると

$$
\begin{aligned}
\vec{OG} &= (\ell \sin\Theta + a \sin\varphi,\ 0,\ -\ell\cos\Theta - a\cos\varphi) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{OG} &= \left(\ell\dot{\Theta}\cos\Theta + a\dot{\varphi}\cos\varphi,\ 0,\ \ell\dot{\Theta}\sin\Theta + a\dot{\varphi}\sin\varphi\right)
\end{aligned}
$$

従って、重心の運動エネルギー T_g および重心回りの回転エネルギー T_r は次のようになる：

$$
\begin{aligned}
T_g &= \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{OG}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\ell^2\dot{\Theta}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2\ell a\,\dot{\Theta}\dot{\varphi}\cos(\Theta - \varphi)\right) \\
T_r &= \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \qquad (\Omega_1 = \Omega_3 = 0,\ \Omega_2 = \dot{\varphi}) \\
&= \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{5}ma^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギーは

$$
V = -mg\,(\ell\cos\Theta + a\cos\varphi)
$$

Lagrangian は $L = T_g + T_r - V$ となる。

注意：微小振動 $(\Theta << 1, \varphi << 1)$ の場合は Θ, φ の運動方程式は解ける。以前勉強した「2重振り子」に参照。

4.　剛体の角運動量および剛体の運動方程式

1) 剛体の角運動量

ここで剛体の角運動量 $\vec{M}$ は、質量中心に対する角運動量と理解する。従って、式 (3) において質量中心の速度 $\vec{V} = 0$ とする：

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) = \sum m\left[\vec{r}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right] \\ &= \sum m\left[r^2\vec{\Omega} - \vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\Omega}\right)\right] \end{aligned} \tag{9}$$

ベクトルの成分で表すと次のようになる：

$$M_i = \sum m\left(x_\ell^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k\right) = \Omega_k \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) \tag{10}$$

慣性テンソルの定義 (6) と比較すれば

$$M_i = I_{ik}\,\Omega_k \tag{11}$$

（ただし、$k = 1, 2, 3$ について和をとる約束を思い出す。）軸 x_1, x_2, x_3 は物体の主慣性軸の場合は、慣性テンソルが対角化され (p.4 に参照)、角運動量の成分は次のようになる：

$$M_1 = I_1\Omega_1 \qquad M_2 = I_2\Omega_2 \qquad M_3 = I_3\Omega_3 \tag{12}$$

一般に角速度 $\vec{\Omega}$ の向きと角運動量 $\vec{M}$ の向きは異なるが、主軸の回りの回転の場合のみ、式 (12) において $\vec{\Omega}$ の一つの成分しかゼロでないので、その場合のみ $\vec{\Omega}$ と $\vec{M}$ は同じ向きである。

2) 剛体の運動方程式

剛体の自由度の数は6である：重心の自由度 $\vec{R}(t)$ (ただし $\dot{\vec{R}} = \vec{V}$) と重心に対する回転軸の向きおよび回転角度 $\vec{\varphi}(t)$ (ただし $\dot{\vec{\varphi}} = \vec{\Omega}$)。それらの運動方程式は Lagrangian (7) から簡単に導くことができる。先ずは重心座標 $\vec{R}$ の運動方程式 (Euler-Lagrange equation)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \tag{13}$$

(7) を使って、

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \mu \vec{V} = \vec{P} = \sum \vec{p} \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F} = \sum \vec{f} \tag{15}$$

ただし $\vec{P} = \sum \vec{p}$ は全運動量であり、$\vec{F} = \sum \vec{f}$ は外力の和を表している[3]。即ち、重心に対する運動方程式 (13) は全ての質点の運動方程式を足し上げたものとなり、

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{16}$$

で表される。
次に、質量中心に対する回転軸および回転角度角度 $\vec{\varphi}(t)$ に対する運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} \tag{17}$$

[3] 重心を $\delta\vec{R}$ だけで移動すれば、全ての質点の座標ベクトル $\vec{r}$ も $\delta\vec{R}$ だけで変わる、式 (1) に参照。従って、ポテンシャルエネルギーの変化は確かに

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \delta\vec{R} \cdot \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\delta\vec{R} \cdot \sum \vec{f} = -\delta\vec{R} \cdot \vec{F}$$

従って、式 (15) は確認された。

(7) を使って、左辺に現れる項は剛体の角運動量となることが分かる：

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i \tag{18}$$

(17) の右辺の意味を理解するために、剛体全体を $\delta\vec{\varphi}$ だけで回す場合を考え、そのときのポテンシャルエネルギーの変化は

$$\delta U = -\sum \vec{f}\cdot\delta\vec{r} = -\sum \vec{f}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}) = -\delta\vec{\varphi}\cdot\sum\left(\vec{r}\times\vec{f}\right) \equiv -\vec{K}\cdot\delta\vec{\varphi} \tag{19}$$

ここで Sect. II の式 (12) を使い、外力 $\vec{F} = \sum \vec{f}$ のモーメント (トルク）を次のように定義した：

$$\vec{K} = \sum\left(\vec{r}\times\vec{f}\right) \tag{20}$$

従って、回転角度 $\vec{\varphi}$ に対する運動方程式 (17) は次のようになる：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \vec{K} \tag{21}$$

注意：上記の運動方程式 (16) および (21) は「静止座標系」(慣性系 XYZ) における運動方程式であり、左辺での微分 $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t$ および $\mathrm{d}\vec{M}/\mathrm{d}t$ はこの慣性系での時間変化率を表している。一般にベクトル $\vec{A}$ について、「慣性系」での変化率 $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t$ と「回転系」 $(x_1x_2x_3)$ での変化率 $\mathrm{d}'\vec{A}/\mathrm{d}t$ は次のように結びついている：

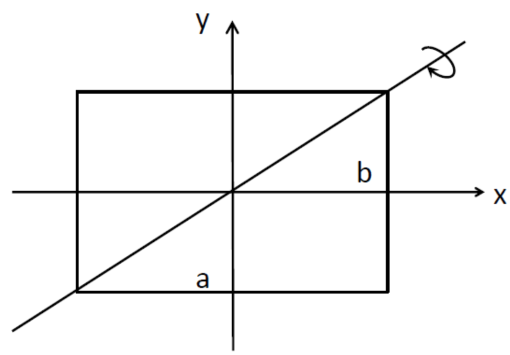
$$\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}'\vec{A}/\mathrm{d}t + \left(\vec{\Omega}\times\vec{A}\right) \tag{22}$$

上式の第 2 個は物体全体の回転から生じるので、第1個は運動座標系から見たベクトル $\vec{A}$ の変化率である。

特に、剛体と一緒に回転する「回転座標系」(非慣性系 $x_1x_2x_3$) において変化しないベクトル $\vec{A}$ の場合は、そのベクトル $\vec{A}$ が物体と一緒に変化しているので、 $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t = \left(\vec{\Omega}\times\vec{A}\right)$ が成り立つ。

5. トルクおよび剛体の運動方程式の具体例（計算は各自で確認）：

(i) 辺の長さが a および $b = a/2$ からなる長方形の薄い板（質量 m) が対角線を通る軸の回りに一定の角速度 Ω で回転している。角運度量 $\vec{M}$ および回転軸の回りのトルク $\vec{K}$ を求める。



板の慣性モーメントは、全問から

$$I_{xx} \equiv I_1 = \frac{m}{48}a^2\,, \qquad I_{yy} = I_2 = \frac{m}{12}a^2\,, \qquad I_{zz} = I_3 = I_1 + I_2 = \frac{5m}{48}a^2$$

角速度のベクトル $\vec{\Omega}$ の向きは対角線の向き (x 軸との角度を Θ とすると、 $\tan\Theta = 1/2$)、大きさは Ω であるので、

$$\vec{\Omega} = (\Omega\cos\Theta,\, \Omega\sin\Theta,\, 0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\Omega,\, \frac{1}{\sqrt{5}}\Omega, 0\right)$$

従って、角運動量は次のようになる：

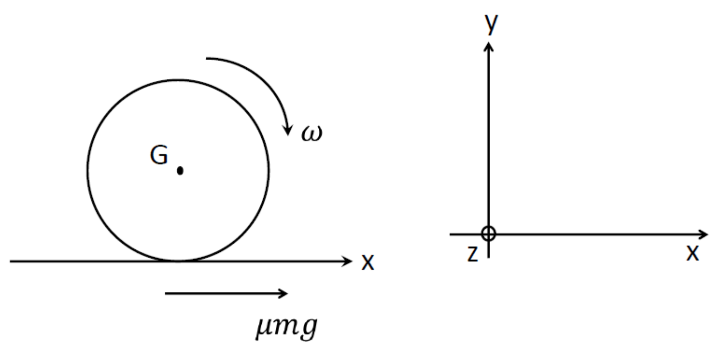
$$M_1 = I_1\Omega_1 = \frac{ma^2\Omega}{24\sqrt{5}}\,, \qquad M_2 = I_2\Omega_2 = \frac{ma^2\Omega}{12\sqrt{5}}\,, \qquad M_3 = 0$$

トルク $\vec{K}$ を計算するために、次の関係式を使う：

$$\begin{aligned}\vec{K} &= \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\vec{M}}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{M}\right)\\ &= \left(\vec{\Omega}\times\vec{M}\right) = \left(0,\, 0,\, \frac{1}{40}ma^2\Omega^2\right)\end{aligned}$$

ただし上式では (22) を使い、運動座標系では $\vec{M}$ が静止していることを利用した。
従って、このような運動が成り立つために外力によるトルク $\vec{K}$ が必要である。

(ii) 半径 r の球が角速度 ω_0 で中心軸の回りに回転している。この球が摩擦係数 μ の平面上に落下したとき、最初滑ってから、次に滑らずに転がり始める。球の回転軸は水平のまま保たれるとし、転がり摩擦はゼロとする。そのときに、重心の最終並進速度、およびこの速度に達するまでに移動した距離を求める。



球が落下した時刻を $t = 0$ とし、その位置は $x = 0$ とする。球が転がり始めた時刻を t_1 とする。

$t < t_1$ （滑り状態）で右向きの摩擦力 $\mu\, m\, g$ が働くので、重心の運動方程式（式 (16)に参照）

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x} &= \mu\, m\, g \\
\Rightarrow \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \mu\, g\, t = \mu\, g\, t \qquad (23) \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{1}{2}\mu\, g\, t^2 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる。$t < t_1$ (滑り状態）でトルク $-\mu\, m\, g\, r$ が働くので、回転軸まわりの運動方程式は　（式 (21) に参照）

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= -\mu\, m\, g\, r \\ \Rightarrow \omega(t) &= \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{r}\, t \end{aligned} \tag{25}$$

となる。ただし、球の慣性モーメント $I = \frac{2}{5}mr^2$ を使った。時刻 $t = t_1$ のときに滑ることなく転がり始めたので、条件

$$\dot{x}(t_1) = r\omega(t_1)$$

が成り立つ。それを使って、式 (23)および (25) から、

$$\begin{aligned} \mu\, g\, t_1 &= r\omega_0 - \frac{5}{2}\mu\, g\, t_1 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{2}{7}\frac{r\omega_0}{\mu\, g} \end{aligned}$$

$t > t_1$ のときに摩擦力が働かないので、重心の最終速度は $t = t_1$ の速度と同じので、 (23) から

$$v_f = \mu\, g\, t_1 = \frac{2}{7}\, r\omega_0$$

また、時刻 t_1 までに移動した距離は (24) より

$$x(t_1) = \frac{1}{2}\mu\, g\, t_1^2 = \frac{2}{49}\frac{r^2\omega_0^2}{\mu\, g}$$