

第2章 波動方程式と平面波解

光は電磁波として記述されるという考えは、電磁場のマクスウエル理論の完成により確立された。光を電磁波として表現することで、光の様々な性質、例えば干渉や回折などの波動性、偏光を記述するベクトル波の性質、光の吸収や増幅、などが合理的に説明される。他方、微弱な光で顕著に現れる粒子的な性質、例えば超高感度な光強度検出器で観測される光強度の時間的揺らぎなどは電磁波としての記述では説明できない。光の量子理論により始めて明らかにされるが、今日でも明らかにされない問題がある。

ここでは、ベクトル波としての光を導入し、光波として説明できる現象をいくつか紹介する。説明内容は、波動の一般論と電磁波としての性質に分かれるが、波動一般論は他の波動現象、例えば音波、海洋波、大気振動、プラズマ波動、地震波などの波動現象に共通した認識を与えるので、光を通して波動を学ぶという考えを持っていただきたい。

2.1 マクスウエルの電磁場方程式系

電場や磁場がどのようにして発生されるかという議論は19世紀の科学の大きな関心事であった。電場の源は電荷であり、磁場の源は電流であるということは実験的に確かめられていたが、変化する磁場が起電力つまり電場を生むことが実験的に示されてから、変化する電場が磁場を生むというアイデアを提唱したのがマクスウエルであった。変化する磁場を巻くように電場が発生し、この変化する電場を巻くように磁場が発生するという連鎖により、電場と磁場が空間に広がっていくのである。それでは、そもそも変化する磁場あるいは電場はどこで発生されるのであろうか。電場 \mathbf{E} 、電束密度 \mathbf{D} 、磁場 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} は次の連立方程式を満足している。この連立方程式を満たす解は無数にあり、具体的な条件で場の量が決められる。

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{マクスウエル・アンペールの式} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ファラディの電磁誘導} \quad (2.2)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad \text{ガウスの法則} \quad \text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad \text{物質の式} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{物質の式} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad \text{物質の式 オームの法則} \quad (2.6)$$

この最初の2式は積分形で表すと、その意味が明らかになる。

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathbf{s}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{s}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{アンペル・マクスウエルの式}$$

$$\oint_{\ell'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathbf{s}'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ファラディの電磁誘導}$$

アンペール・マクスウェルの式が意味するところは、電流あるいは、時間的に変化する電場を取り囲むように閉曲線 l を取り、 l に沿って磁場 \mathbf{H} を接線積分すると、その結果は l で囲まれる面 S を貫く全電束（密度）の時間的変化率と面 S を貫く電流によって磁場は発生される。つまり、電束（密度）の時間変化が電流と同じ作用をもたらすものである。電流を取り巻くように磁場が発生するのはアンペールが見つけた法則であるが、変化する電場がその回りに磁場を生み出す考えはマクスウェルの発見である。第二の式：ファラデーの電磁誘導の式では、閉曲線 l' で囲まれる曲面 S' を貫くトータルの磁場（磁束）が時間的に変化するとき、閉曲線 l' に沿って電場が発生し、この電場をループ l' に沿って一周接線積分したものがトータルの磁場（磁束のこと）の時間微分と等しいことを言っている。ここで、右辺にマイナスの記号が付いているのは、磁束の変化を妨げるように電場が発生されるからである：これは例えば、磁場が右ねじが進む方向を向いていて、しかもその時間微分係数が正ならば（要するに磁場が増えつつあるとき）右ねじの回転方向と逆向きに電場ベクトルが巻くように分布する。また、磁場の方向は同じでも、磁場が減少途中なら時間微分係数は負になるので、第二式の右辺は正になり、電場ベクトルは右ねじを巻く方向で分布する。棒磁石をコイルなどのループ回路に出し入れすると電流が流れることを思い出して欲しい。電流が流れるということは、電線に沿って電場が発生していることを物語る。この電場をコイル一巻きで積分すれば、コイル一巻き分の起電力（つまり電圧）が得られる。何回も巻いたコイルでは巻き数倍の起電力が生じる。

2.2 光波の発生

さて、下図の(a)では地面に垂直に立てたアンテナに角周波数 ω [rad/s]の交流電流を流している例である。この場合、アンテナを取り巻くように磁場が生じ、この磁場は電流と同じ角周波数で振動している（つまり巻く方向が右向きだったり左向きだったりする）。ここで、さらに電磁誘導の原理で、変化する磁場を巻くように電場が生じる。この電場はやはり同じ周波数で振動しているので、その回りに磁場を生む。このようにして、電磁波が発生され遠方へ伝わっていく。下図の(b)では平行平面電極間に交流電流を流している。この場合では極板間に伝導電流は流れないが、変化する電場が生じ、これを取り巻くように磁場が出来、さらにこの磁場を取り巻くように電場が出来ていて、外側へ伝わっていく。

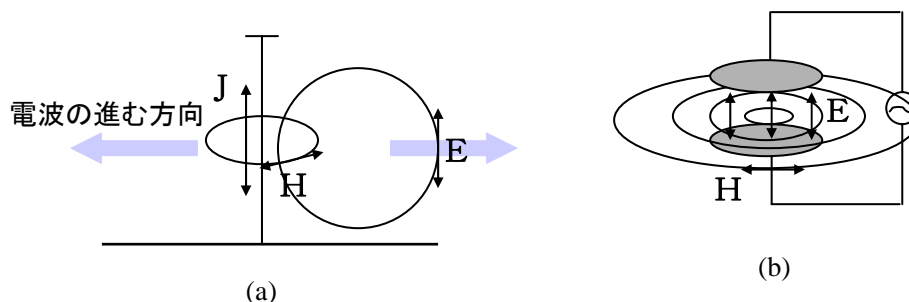


図 2.1 電磁波の発生

さらに、電磁波発生的一般論からの結論として、電気的雙極子モーメントの時間についての2回微分； $q\ddot{\mathbf{r}}$ 、あるいは別の言い方をすれば電流密度の時間微分 \mathbf{J} が電磁波発生の源になることが証明される（例えば、ハイトラー著 輻射の量子論、あるいはランダウ＝リフシッツ著 場の古典論、ジャクソン著 電磁気学などを参照されたい）。また、別の言い方をすれば、荷電粒子の運動量が時間的に変化すれば電磁波を生むともいえる。このような説明は、電磁波をフォトンの流れと見たときに、フォトン流の源はどこかという質問に答える際、重要な意味を持つ。例えば、下図のように、荷電粒子が円軌道を描いて等速で運動していると円軌道と同じ面内に放射状に電磁波を発生する。電子の運動エネルギーが非常に高くなるかあるいは軌道半径が小さいと、たとえば100MeV程度のエネルギーで半径10m程度の円軌道では、放射される電磁波は広いスペクトルを持ち、極端紫外の波長までも含むようになる。このような光をシンクロトロン放射光(Synchrotron Orbital Radiation; SOR)と呼ぶ。現在では大型の放射光設備が関西播磨のSpring-8、つくばの高エネルギー物理学研究所の大型放射光施設などで稼動していて、物性研究で活躍している。

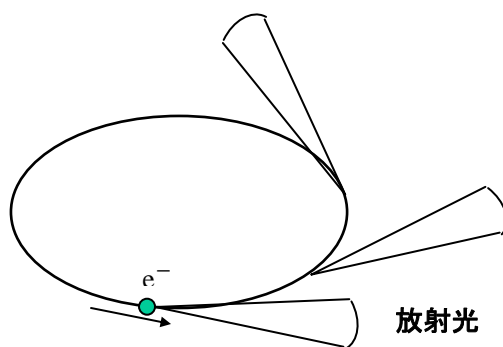


図 2.2 シンクロトロン放射

今までの説明で登場した光源はマクロなサイズを持つものである。ところで、原子や分子が発生する光の発生起源は全く異なる。原子および分子が量子遷移を行う際にエネルギー保存のために光子（フォトン）を放出する。原子1個でフォトン1個を放出するが、大量の原子や分子が放出するフォトンは大量であり、個々のフォトン同士の位相が合っていない。フォトン有限な長さの波と考えると、これらの、お互いの位相がランダムで、合っていない状態で重ね合わせる大量のフォトンの流れを我々は光として感じている。個々のフォトンは全て同じ振動数、つまり波長を持っているので波長の決まった光として見える。位相がランダムな大量のフォトンを重ね合わせると光の強度は小刻みに変動するであろう。しかしながら、十分な量のフォトンを重ねあわせれば、この強度の揺らぎは無視できて、強度一定の光として感じられる。フォトン一個ずつを微弱な電磁波として扱い、フォトンの数の分だけ振幅を大きくして、フォトン流を電磁波として扱うのが、光の電磁波理論である。これに比べ、光を放出する原子群が位相を合わせて一斉に光を放出するのがレーザーであり、フォトン同士の位相が合って重ねあわされるのでよっぽど電磁波のよう

に振舞う。ここでは、蛍の光のようなランダム原子群から放射される光も電磁波として扱い、その特徴を吟味する。

2.3 波動方程式

マックスウエル・アンペール方程式の両辺の rot をとると、

$$rot(rot\mathbf{H}) = rot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right) = \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{D} + rot\mathbf{J} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} + \sigma rot\mathbf{E}$$

となるが、これの右辺にファラデーの公式 $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ および、 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ を適用する

と、右辺は $-\varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ もしくは、 $-\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$ となる。ところで、上式の

左辺は良く知られたベクトル解析の公式 $rot(rot\mathbf{A}) = grad(div\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$

を用いて変形できる。ここで \mathbf{A} は任意のベクトルであり、 Δ はラプラシアンである。この公式の意味は、各成分ごとに、

$$x \text{ 成分は } \frac{\partial}{\partial y} (rot\mathbf{H})_z - \frac{\partial}{\partial z} (rot\mathbf{H})_y = \frac{\partial}{\partial x} (div\mathbf{H}) - \Delta H_x$$

などと書けることを意味する。同様に、 y および z 成分についても書き下せる。 x 成分の表式をさらに細かく書くと、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right)$$

があからさまな表式である。

ところで、 $div\mathbf{B} = 0$ であるので、 $div\mathbf{H} = 0$ である。これを利用すると、

$$rot(rot\mathbf{H}) = -\Delta\mathbf{H}$$

であるので、結局、

$$-\Delta\mathbf{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

が得られる。これを書き直して、

$$\Delta\mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

となる。この式を**電信方程式**という。この方程式の意味は、まず、ベクトル \mathbf{H} の各成分に対してこの方程式が成り立つということである。つまり、上方程式は、具体的には

$$\begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{pmatrix} - \varepsilon\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{pmatrix} - \mu\sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

あるいは、ラプラシアンを更に具体的に表すと、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} - \varepsilon\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{pmatrix} - \mu\sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

となる。

電場 \mathbf{E} についても同様で、まず、電磁誘導式の両辺の rot をとり、 $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ を利用すると、

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\mathbf{B} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\mathbf{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

となるが、公式

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$$

を用い、また、ガウスの定理

$$\text{div}\mathbf{D} = \varepsilon\text{div}\mathbf{E} = \rho$$

において、通常

$$\rho = 0$$

である。というのは、光が通る媒質中では、通常の場合は電荷の中性が保たれているからである。したがって、 $\text{div}\mathbf{E} = 0$ となり、これを利用すると、 $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = -\Delta\mathbf{E}$ となり、結局磁場と同じ形式の**電信方程式**が得られる：

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

電場や磁場の電信方程式は解を無数に持ち、境界条件を与えることで解を特定する。また、電場および磁場の方程式は、それぞれ電場だけあるいは磁場だけを含むことが特徴的である。

一度光が光源から出て、真空あるいは透明絶縁体中を進む場合を考えよう。この場合、真空や絶縁体では電気伝導度がゼロなので、電信方程式中の σ をゼロとすることで、

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{および} \quad \Delta\mathbf{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

が得られる。これを**波動方程式**と呼び、自由空間中を伝播する電磁波を記述するのに用い

られる。波動方程式はベクトル方程式なので、例えば電場が z 成分だけを持ち、電場の大きさが z および y には依存せず、 x にだけ依存する場合も記述される。この場合、 x 方向へ伝播する波を表現し、波動方程式（1次元波動方程式）は

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.12)$$

となる。

2.4 波動方程式の解

波動方程式の解を探すために、2回以上微分可能な任意の関数 $f(x)$ を用いて解を

$$E_z = f(x - vt) \quad (2.13)$$

として与えてみよう。ただし、 v は任意の定数ではなく、この解が波動方程式を満たすように決めなければならない。実際、(2.13)を(2.12)へ代入すると、

$$f'' - \varepsilon\mu v^2 f'' = 0 \quad \text{あるいは} \quad v = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (2.14)$$

のように v を決めれば、式(2.13)は波動方程式(2.12)の解となる。このとき、 v は物質の定数である ε と μ で規定される。これを満たす v を用いた $E_z = f(x - vt)$ が波動方程式(2.12)の解となる。

この解の形を見ると、関数 $f(x)$ を x 軸の正方向へ vt だけ移動したものになっている。つまり、速度 v で t 秒間移動した関数を与える。1次元波動方程式を満たす解は任意の2回以上微分可能な関数で与えられる。この移動速度 v を位相速度という。絶縁体中での電磁波の位相速度の大きさは $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ である。 ε と μ に真空中での値を代入すれば、この位相速度は正に真空中の光速 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ を与えるであろう。また、任意の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を用いて、 $h = f(x - vt) + g(x + vt)$ もまた波動方程式の解であることは容易に確かめられる。 $g(x + vt)$ は x 軸の負方向へ速度 v で移動する関数を表す。

さて、ここで、1次元波動方程式を満たす解として、振動する解、

$$E_z = A \cos(kx - \omega t) \quad \text{または} \quad E_z = A \exp i(kx - \omega t) \quad (2.15)$$

を使ってみる。2番目の複素表示した関数では、**実部**を取ること**で実際の電場を与えることとする**。ここで、 k と ω の意味を明らかにするために、上のコサインの式を波動方程式に代入する。

$$(-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2)A \cos \omega t = 0$$

より、
$$k = \pm \sqrt{\varepsilon\mu}\omega \quad (2.16)$$

として k と ω が関係付けられている。また、 $\cos(kx - \omega t) = \cos k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right)$ と書き直せば、

この解は $\cos kx$ を x 軸の正方向へ位相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.17)$$

で t 秒間動かしただけのものとなっている。さて、ここで、適当な時間、例えば $t=0$ における解は $\cos kx$ であり、このまま時間を固定して（つまり、 $t=0$ で写真を撮ったとして） $x=0$ から $x=2\pi/k$ まで進むと $\cos kx$ は同じ値をとる。したがって、 $2\pi/k$ は波長という意味を持つ。また、任意の位置 x において時間が、例えば $t=0$ から $t=2\pi/\omega$ まで変化しても $\cos(kx-\omega t)$ の値は同じであるので、 $2\pi/\omega$ は周期という意味を持つ。これらを踏まえて、いくつか言葉を定義しよう。上記コサイン波において、

$$kx - \omega t = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \quad (2.18)$$

を波動の位相という。時間が進むとき、 $x - \frac{\omega}{k} t$ を一定値 C にする位置は $x = \frac{\omega}{k} t + C$ で与えられる。この位置は時間経過とともに速度 $\frac{\omega}{k}$ で移動する。この速度で移動する位置では時間が経過しても位相が不変である。つまり、位相速度とは位相が等しい位置が移動する速度である。

ところで、波長は $\lambda = 2\pi/k$ であったので、これから $k = 2\pi/\lambda$ である。この結果によれば k は距離 2π メートル中に波が何個あるかを示す。つまり、この意味から k を波数という。また、周期は $T = 2\pi/\omega$ で与えられる。これから、 $\omega = 2\pi/T$ となるが、この結果から ω は 1 秒間に位相が何 rad 変化するかを示し、角周波数（各振動数）と呼ばれる。角周波数は周波数と $v = \omega/2\pi$ の関係になっている。以上をまとめておく。

$\cos(kx - \omega t)$ に於いて、

$$k = 2\pi/\lambda \quad T = 2\pi/\omega \quad v = \omega/2\pi \quad (2.19)$$

波動場を複素関数で $\exp i(kx - \omega t)$ として表した場合、その実部をとって波動場とするならば、上記の結論はそのまま利用できる。

2.5 二次元および三次元波動

次に、2次元平面上で伝播する波動について考える。これは、波動方程式において電場や磁場などの場の変量が x および y 座標だけの関数になっている場合である。この場合の波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

で与えられる。磁場についても同様の式が成り立つ。ここで、 \mathbf{E} は3次元ベクトルである。ベクトル \mathbf{E} の3成分について上式が成り立つので、まずスカラー関数 f についての波動方

程式、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (2.22)$$

について、その解の意味を考える。ここで、 f は \mathbf{E} の 3 成分のどれかである。解は無数にあるが、

$$f = f_0 \exp i(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (2.23)$$

の形の解を適用する。ここで、 k_x と k_y はある定数である。 ω は波動の角振動数であるが、ここでは、ある定数として与えておく。この関数を波動方程式 (2.22) に代入すると、

$$(-k_x^2 - k_y^2 + \epsilon\mu\omega^2)f = 0$$

が得られる。これより、

$$k_x^2 + k_y^2 = \epsilon\mu\omega^2 \quad (2.24)$$

という関係を満たせば、関数 f は、波動方程式の解となる。ここで、 k_x と k_y の意味を明らかにするために、この 2 つの定数をそれぞれ x および y 成分とするベクトル

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) \quad (2.25)$$

を導入する。このベクトルを使えば、波動場は

$$f(\mathbf{r}) = f_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.26)$$

と書ける。ここに、

$$\mathbf{r} = (x, y)$$

は観測点 (x, y) まで引いた位置ベクトルである。

今、時間を止めて、別の観測点 $\mathbf{r}' = (x', y')$ で波動場を観測したとする。ここでの観

測値は $f(\mathbf{r}') = f_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t)$ と表せる。

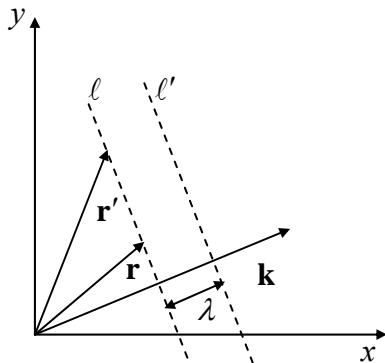


図2.3 平面波の波面と \mathbf{k} ベクトル

ここで、もし $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ の条件を満たすように \mathbf{r}' を与えれば、波動場の \exp の中身が同じになり、位置 \mathbf{r} における波動場と同じ位相になっていることが分かる。下図で示した直線 l は \mathbf{k} ベクトルに垂直で位置 \mathbf{r} を含むものであるが、 \mathbf{r}' の先端もこの直線上にあり、この直線上の全ての観測点で波動場は同位相となる。実際の物理量は複素波動

関数の実部で与える。いまの場合は $f = f_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ となる。したがって、もし直線 l 上の位置で位相 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ の値が π の偶数倍となっているならば、この直線は波動の山を与え、奇数倍ならば谷を与える。

ここで、ベクトル \mathbf{k} 方向へ X 軸をとり、垂直方向へ Y 軸を取ることで、 $X-Y$ 座標系を作る。直線 l と X 軸との交点を X とすると、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' = kX$ であるので、波動場は

$$f_0 \cos(kX - \omega t)$$

と表現され、結局伝播方向が 1 次元 (X 軸方向) への波動に帰着される。このことは、次のようにしても求められる。 X 軸と x との角度を θ とすると、 X 軸は \mathbf{k} 方向を向いているという条件から次の変換が成り立つ。

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta = \frac{k_x}{k} X - \frac{k_y}{k} Y$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta = \frac{k_y}{k} X + \frac{k_x}{k} Y$$

この結果を $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ に代入すると、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y = \left(\frac{k_x}{k} X - \frac{k_y}{k} Y \right) k_x + \left(\frac{k_y}{k} X + \frac{k_x}{k} Y \right) k_y$$

$$= \frac{k_x^2 + k_y^2}{k} X = kX$$

となり、 X 軸方向へ伝播する波動 $f_0 \cos(kX - \omega t)$ が得られる。

この結果から、時間の経過と共に、位相 $kX - \omega t$ が一定値であるような位置 X は速度 ω/k で X 軸上を移動していく。視覚的には一定の位相値を与える直線 l は X 軸方向へ、あるいは、別の言い方をすれば \mathbf{k} 方向へ速度 ω/k で移動することになり、 \mathbf{k} ベクトルは波動の伝播方向を与えることがわかる。

結局、 $f_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ の形の 2 次元波動 (これを調和波あるいはハーモニックウェーブ

Harmonic Wave という) は 1 次元波動 $f_0 \cos(kX - \omega t)$ に帰着するので、1 次元波動での結

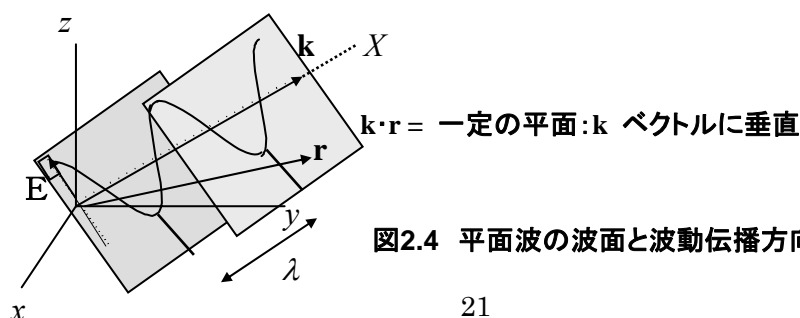


図2.4 平面波の波面と波動伝播方向

論；波数、波長、周期、振動数、および角振動数などの関係がそのまま使える。

$x-y$ 平面を伝播する調和波は結局 1 次元を伝播する調和波として表せることを示したが、3 次元空間を伝播する調和波も同様に 1 次元波動として表せ、波動の伝播方向を与える \mathbf{k} ベクトルも 3 次元ベクトルとなる。また、 \mathbf{k} ベクトルに垂直な平面では位相が一定であり、これを**等位相面**と呼ぶ。したがってこの波（三次元調和波）は**平面波**ということになる。

ところで、 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$ および $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ の法則に $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$ および $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0 \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$ を適用すれば、例えば

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=i(k_x E_{0x}+k_y E_{0y}+k_z E_{0z})=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$$

より
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0 \quad (2.27)$$

が得られ、波数ベクトルと電場ベクトルは常に垂直であることが示される。つまり、**平面波の場合**、電場ベクトルは波の進行方向と垂直である。また、 $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ の x 、 y 、 z の各成分はそれぞれ、

$$i(k_y E_{0z}-k_z E_{0y}) \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t), \quad i(k_z E_{0x}-k_x E_{0z}) \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$$

$$i(k_x E_{0y}-k_y E_{0x}) \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$$

であるのでこれは $\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E}$ と表せる。ここで、 $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{B}=-i\omega\mu\mathbf{H}$ であることを

電磁誘導の式 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=i\mu\omega\mathbf{H}$ に代入すれば

$$\frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\mathbf{H} \quad \text{あるいは} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}=\mathbf{H} \quad (2.28)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ は波数ベクトル方向の単位ベクトルをあらわす。この結果より、電場と磁場は互いに直交していて、両者とも波数ベクトルに垂直であ、**電場と磁場は独立ではない**ことも確認できる。(2.28) 式から、電場と磁場の大きさの関係として $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\mathbf{E}|=|\mathbf{H}|$ が求まる。

2.6 位相速度と群速度

1 次元波動についていくつか追加的な特性を検討する。 x 軸方向へ伝播する光波で、まず、 k と ω が少しずつ異なる波動を重ね合わせてみる。

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 \cos(k_1 x-\omega_1 t)+\mathbf{E}_0 \cos(k_2 x-\omega_2 t)=2\mathbf{E}_0 \cos(\Delta k x-\Delta\omega t)\cos(kx-\omega t) \quad (2.29)$$

ここで、

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad \Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \text{および} \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.30)$$

であるが、 k_1 と k_2 および ω_1 と ω_2 がそれぞれ近い値であれば、 $k = k_1 \approx k_2$ および $\omega = \omega_1 \approx \omega_2$ である。電場の一つの成分についてこの波形を図示したものが下図である。

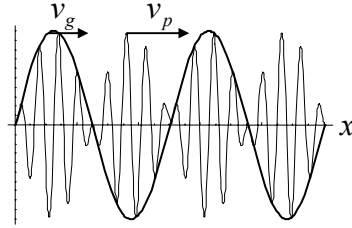


図 2.5 位相速度と群速度

上記の波動を重ね合わせた式を見ると、波数が k および角周波数が ω で伝播する波 $\cos(kx - \omega t)$ の振幅が $\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ の形で x 座標と時間 t に依存して変化することがわかる。時間を固定して波動場を見たのが上図である。上図の波動パターンが x 軸の正方向へ移動していく。ここで、高い周波数で振動している波、あるいは、上図で波長の短い波を**搬送波**と呼ぶことがある。ここで、波長の長いうねりのような波の伝播速度と搬送波の伝播速度は等しいとは限らない。むしろ等しくない場合のほうが多い。この 2 種類の伝播速度について考えてみる。搬送波の山あるいは谷が伝わっていく速度を、この波動場の**位相速度**と呼び、 v_p で表す。波動場の式から明らかに

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (2.31)$$

である。また、うねりが伝わる速度を、この波動場の**群速度**と呼び、 v_g であらわす。上式

から $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ であるが、2 つの波の波数と角周波数が非常に近接しているとして、通常

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.32)$$

とする。波動場は通常、異なる波数と周波数の多くの波を重ねて表わされ、もっと複雑な形をしているが、とりあえず 2 種類の波動の重ね合わせたものについて考察を進める。

k と ω の関係は $k = \sqrt{\epsilon\mu\omega}$ であった。したがって、 $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ となる。これは、いまままで**波動が伝わる速度**と呼んでいたもので、それは位相速度のことである。ところで、光を通す物質では磁気透磁率 μ は真空の値 μ_0 とほぼ同じ値であるが、誘電率 ϵ は真空の値と

は大きく異なり、しかも光の角周波数 ω に依存する。とすれば、位相速度は角周波数に（光の色に）依存するという結論を得る。位相速度を身近な屈折率で表そう。

屈折率 n は（真空中での光速） / （物質中での光速）であるから、

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.33)$$

である。比誘電率は光の周波数に依存しているので、屈折率は比誘電率の平方根で与えられ、光の周波数に依存している。屈折率が光の周波数に依存する現象を光の分散という。

屈折率を使って $k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\omega = \frac{n}{c}\omega$ と表せるので、位相速度は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (2.34)$$

となり、真空中での $1/n$ 倍になる。

同様に、群速度を求めよう。 $k = \frac{n}{c}\omega$ であることを使って、

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{\frac{c}{n}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v_p}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} \quad (2.35)$$

であり、 $\frac{dn}{d\omega} \neq 0$ であれば、 $v_p \neq v_g$ である。通常の透明媒質では可視光の周波数領域で

は $\frac{dn}{d\omega} > 0$ 、つまり、周波数が大きいほど屈折率が高い、あるいは別の言い方では、波長

が短くなると屈折率が高い場合では $v_p > v_g$ であり、搬送波が振幅変調波より速くすすむ。

このような分散を**正常分散**とよぶ。また、もし $\frac{dn}{d\omega} < 0$ であれば**異常分散**と呼び、具体的に

は、光の吸収スペクトル線の近傍で、光の角周波数が吸収周波数より小さい場合は正常分散で、吸収周波数より大きい周波数では異常分散となる。位相速度と同様に群速度も光の角周波数、あるいは波長に依存する。分散により、パルス状の光が物質を通る際にパルスの進む速度が搬送波の波長で違ってくる。したがって、例えば赤い波長のパルスは青い波長のパルスより速く進むという現象が生じる。このように群速度が光周波数で異なる現象を**群速度分散**といい、パルスの到達時間が光周波数で異なることを**群遅延分散**という。近年、非常に短いパルス（パルス時間幅が 10^{-13} 、100 フェムト秒）の利用が盛んになってきたが、これ程に短いパルスでは、波長が 800nm と 400nm のパルスを厚さ 1cm 程度のガラス

に同時に入射すると、出てくるときは重ならなくなる。赤いパルスが 1km 伝播する間に、青いパルスは約 40m 遅れる。

屈折率が波長に依存することを示す表式は、石英ガラスについては：

$$n^2 = 1 + \frac{0.6961663}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{0.4079424}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \frac{0.8974794}{1 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^2} \quad (2.36)$$

が良く用いられる。これをセル・マイヤーの公式と呼ぶ。これを用いた屈折率の計算例を下図に示す。ここで用いられたパラメータを図の横に示した。

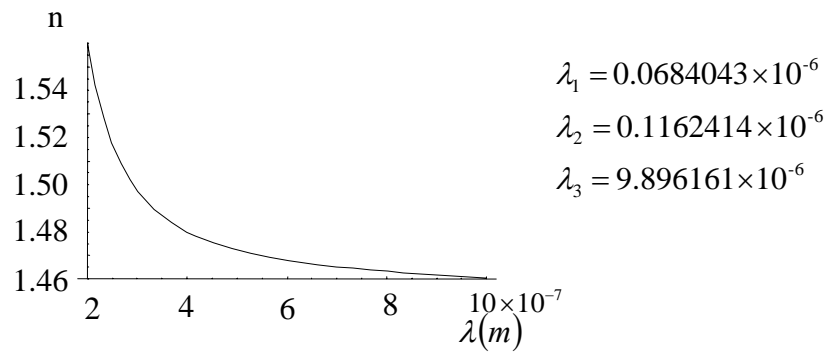


図 2.6 屈折率の波長依存性 (分散曲線)

この屈折率曲線から位相速度と群速度、および 1km の石英を伝播するのに要する時間を波長の関数として下図に示す。

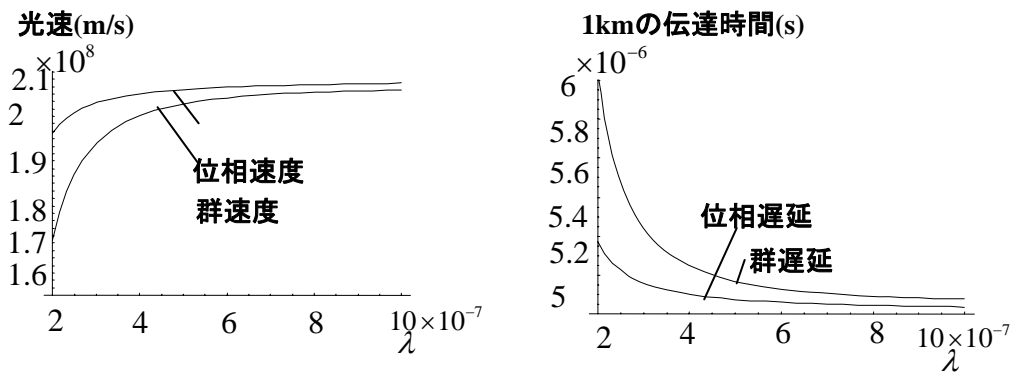


図 2.7 位相速度と群速度の波長依存性

2.7 光の強度とエネルギー密度

ところで、平面波の電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ および磁場

$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(k \cdot x - \omega t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}_0 \cos(k \cdot x - \omega t)$ について、

$$u = \frac{1}{2} (\epsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2) = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}_0|^2 (\cos 2(k \cdot x - \omega t) + 1) \quad (3.37)$$

は空間に分布する電磁場のエネルギー密度を与える。また、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{s} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 (\cos 2(k \cdot x - \omega t) + 1) \quad (3.38)$$

はポインティングベクトルであり、単位面積を単位時間に流れる光のエネルギーを与える。つまりパワー密度のことであり、光の強度のことである。

ところで、これらの量は表式が示すように、時間的にも空間的にも激しく振動している。波の振幅が最大のところでは電場および磁場の値が最大になるので、この位置ではエネルギー密度が最も大きい。このエネルギー密度の分布が光速で移動していくわけであるが、エネルギーの計測器はこのような速さには追従しない。したがって、光を相手にする場合は、光波の一振動周期で平均したものをを用いる。つまり、上式を一周期 $T = 2\pi/\omega$ で時間平均し、

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad \bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt \quad (2.39)$$

でそれぞれ周期平均されたエネルギー密度とポインティングベクトルを与えると、

$$\bar{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \bar{u} = \bar{u} \mathbf{v} \quad (2.40)$$

が得られる。ここで、 $\hat{\mathbf{s}}$ はポインティングベクトルの方向への単位ベクトルである。つまり、ポインティングベクトルとはエネルギー密度に光の速度を掛けたものであり、たしかにエネルギーの流れを与えるものである。

一周期で平均したエネルギー密度の考え方を 2 種類の波を重ね合わせた場合に適用してみる。このとき、波動場は搬送波に振幅変調を載せた波となった。これは、光の場合に適用すると、光が強くなったり弱くなったりする現象として現れる。つまり、光のうなりを見ることになる。具体的に、この現象を見せるものとしてはレーザーを用いたモード同期という手法がある。この場合、2 種類の波ではなく、何 100 という波を重ね合わせることでよりスパイク状の光パルス列を得ることが出来る。

さてここで、2 種類の波動を重ね合わせると、電場は

$$\cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \cos(kx - \omega t)$$

の形の波動となった。したがって、電場のエネルギー密度は

$$\cos^2(\Delta kx - \Delta \omega t) \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{4} (\cos 2(\Delta kx - \Delta \omega t) + 1) (\cos 2(kx - \omega t) + 1)$$

の形をしている。これを搬送波の周期で時間平均すると、 $\Delta\omega \ll \omega$ なので、積分の際に $\Delta\omega t$ はほとんど変化しないので最初のコサインの項は積分記号の外に出せ、結局

$$\overline{\cos^2(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{4}(\cos 2(\Delta kx - \Delta\omega t) + 1)$$

となる。これは、エネルギー密度は空間的に周期的に分布し、唸りの波長の半分で空間的に繰り返したものになっている。その周期的な分布パターンが速度 $\Delta\omega/\Delta k$ で、つまり群速度で移動することを示す。これは、目に見える現象としては、うなりによる波のかたまりが、あるいは光のパルスの列がエネルギーを運んで飛んでいくことを意味する。群速度はこのパルスの飛ぶ速度であり、**エネルギー伝播の速度**と呼ばれるわけである。この結論は光のみならず、流体を伝わる波動でも、あるいは波動現象一般に共通のことである。

2.8 光の偏光

次に、電場の z 成分と y 成分で振動の位相がずれている場合の電気ベクトルの動きを見てみよう。

$$E_z = E_{0z} \cos(kx - \omega t) \quad \text{および} \quad E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (2.41)$$

で、 $\delta < 0$ の場合のそれぞれの成分が変化する様子を下図に示した。

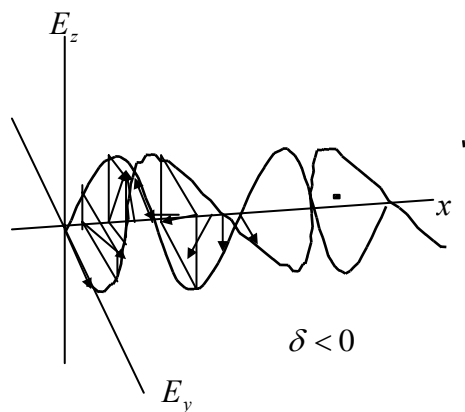


図 2.8 光の偏光

電場ベクトルの動きを、空間の固定点で観測した場合と、時間を固定して光の進行方向へ進むときに見える場合について下図に示す。

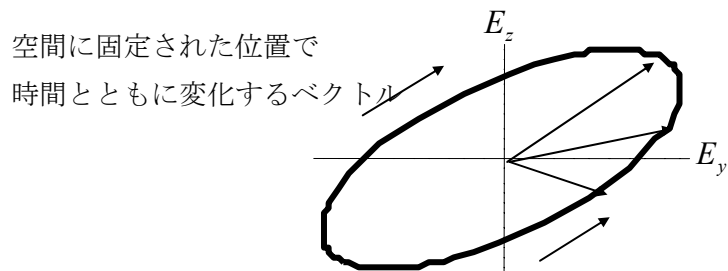


図2.9 楕円偏光の電場ベクトルの動き

時間を止め、x方向へ観測点を進めるときのベクトルの変化

このように、電場ベクトルの動きは楕円に沿ったものになり、これを楕円偏光と呼ぶ。 δ の値に応じて電場ベクトルの動きが変わる。Xを固定し、光線の進行方向を眺めて観測する場合の電場ベクトルの動きを下図に示す。

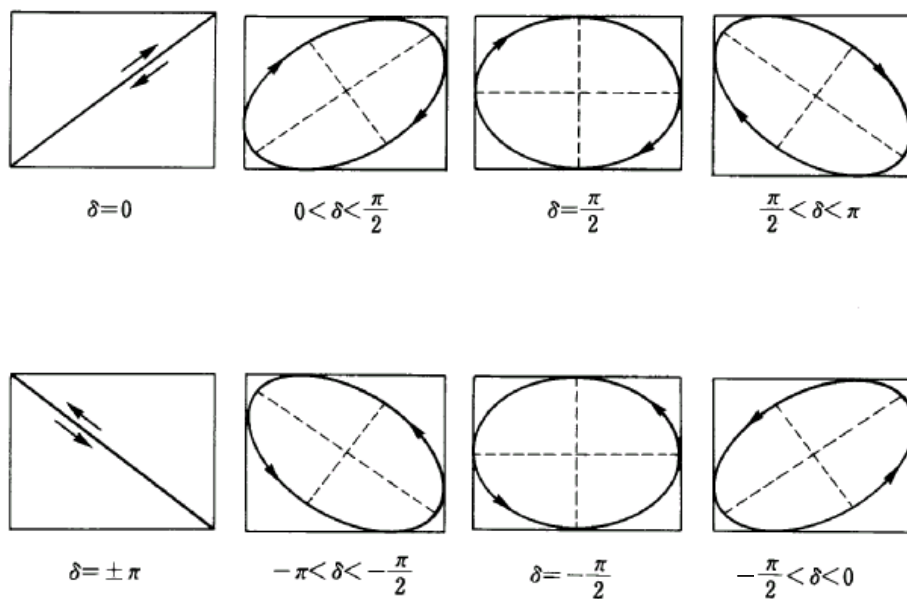


図 2.10 様々な偏光状態での電気ベクトルの動き