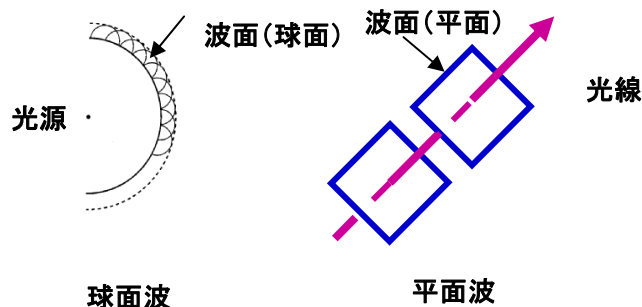


第1章 幾何光学

1.1 幾何光学の概念



波面: 波の位相が一定である

光線: 波面に垂直な線でエネルギーの流れを示す

図1.1 ホイヘンスの原理と光線

光が伝播している空間において、光波の位相（山とか谷とか）が一定である面を等位相面とか波面とか言う。波面に垂直に立てた法線をたどっていくと光線が形成される。光線は光のエネルギーの流れを示し、電磁波のポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向を向いている。

光源が無限に小さい点であれば、この光源から放射される光の波面は球面となる。これを球面波という。点光源から無限に遠い空間では光波の波面は平面と考えられ、この波を平面波という。波の進み方についてホイヘンスの原理がある。ホイヘンスの原理によれば、任意の波面上に点光源が無数に並んでいて、この点光源からの球面波（これを要素波という）を連ねた面、つまり包絡面が次の瞬間の波面を与える。これを数学的に定式化したものが、後述するキルヒホッフの積分定理（Kirchhoff's Integral）である。

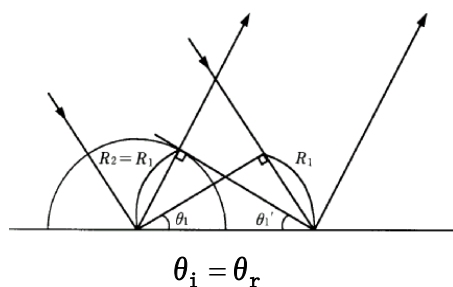


図1.2 反射の法則

波面の進み方を考えると、光の反射法則が導ける。図 1.2 において、入射光の波面が R_1 だけ進んで反射面に到達するとき、反射光の波面が R_2 だけ進んだとする。明らかにこの両者

は等しいので、つまり $R_2 = R_1$ なので図中の直角三角形の合同から $\theta_i = \theta_r$ である。これらの角度は反射面に垂直に立てた法線に対する入射および反射の角度なので、**入射角と反射角が等しいという反射の法則**を与える。

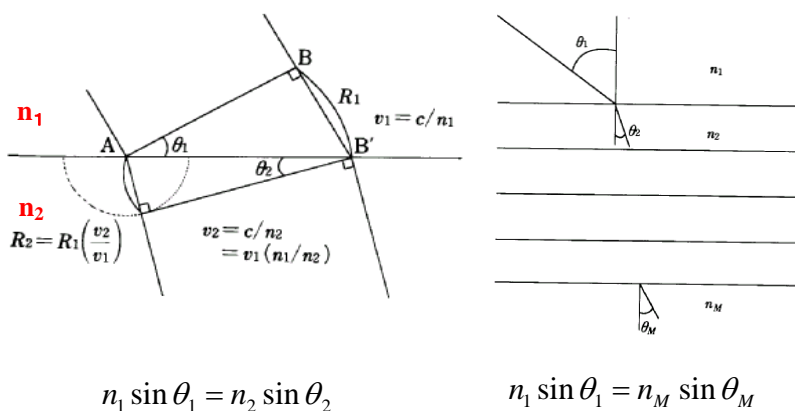


図1.3 屈折の法則

ここで、光が屈折率 n_1 の媒質から n_2 の媒質へ入射する際の入射角と屈折角の関係を求める。この図 1.3 において、入射波面が媒質 1 の中で B から B' まで距離 R_1 だけ移動して境界面に到達したとする。ところで、屈折率の意味は、真空中の高速 c を媒質中の光速 v_1 で割ったもの、 $n_1 = c/v_1$ である。既に境界面に到達した波面はこの時間内に R_2 だけ媒質 2 を進むとすれば、 R_1 および R_2 を進むのに要する時間は等しいので

$R_1/v_1 = R_2/v_2$ つまり、 $n_1 R_1 = n_2 R_2$ あるいは、 $R_1/R_2 = \sin \theta_1 / \sin \theta_2$ を用いれば、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

である。この関係を**屈折の法則**という。

次に、屈折率 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_M$ の媒質が層を形成し、各界面が平行な平面であると、媒質 1 から媒質 2 へ入射角 θ_1 で入射したとする。ここで、媒質 M へ出て行くときの屈折角 θ_M を求める。図 1.4 から、最初の境界面で

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

であるが、2 番目の境界で、

$$n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3$$

であり、M-1 番目の境界では

$$n_{M-1} \sin \theta_{M-1} = n_M \sin \theta_M$$

であり、結局

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \dots = n_M \sin \theta_M$$

より、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_M \sin \theta_M$$

となる。この結果によれば、M 番目の媒質へ抜けていく屈折角は途中の媒質によらない。したがって、もし M 番目の媒質が最初の媒質と同じ屈折率なら、つまり、 $n_1 = n_M$ なら $\theta_1 = \theta_M$ である。例として、平行なガラス板の表面に多層の薄膜が付いている場合、薄膜への入射角とガラスから出てくる屈折角は等しい。眼鏡やカメラレンズについている反射防止膜が光の進行方向に影響を与えない理由である。

1.2 光線追跡 (Ray Tracing)

伝播する光線の特徴付けるものとして、光線の光軸からの高さ r と光軸に対する傾き r' がある。光軸上の任意の位置での光線の位置と傾きが与えられたならば、いろいろな光学的空間を通過したあとの光線の位置と傾きを予言することが出来る。それを可能にするのが

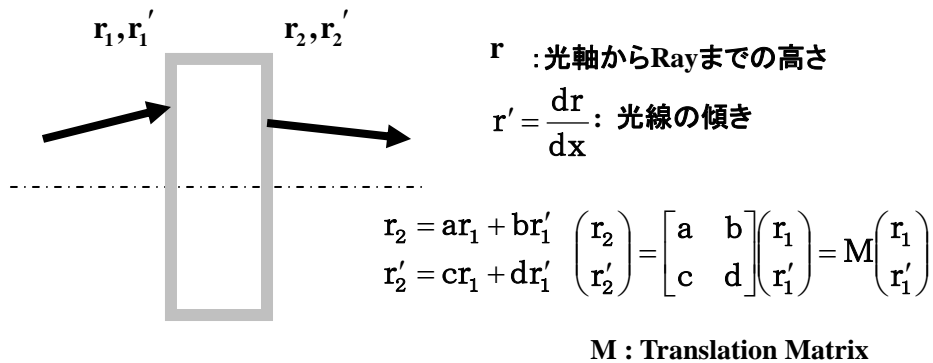


図1.4 Ray行列と応用

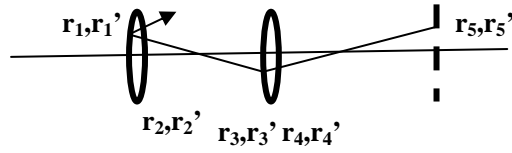
光線行列である。図 1.4 において、光軸を x 軸に取り、ある光学素子に対し、光軸からの高さ r_1 および光軸に対する傾きが $r'_1 = \left. \frac{dr}{dx} \right|_{x=x_1}$ である光線が入射しているとする。この光学素子から出てくる光線の高さと傾きが、それぞれ r_2 および $r'_2 = \left. \frac{dr}{dx} \right|_{x=x_2}$ であって、関係

$$\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + Br'_1 \\ r'_2 &= Cr_1 + Dr'_1 \end{aligned}$$

あるいは、行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

と書き表せるとき、右辺の 2 行 2 列の行列を光線行列とか ABCD 行列と言う。



$$\begin{pmatrix} r_5 \\ r_5' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

図1.5 光学素子の組み合わせとRay行列

図 1.5 には光線がレンズに入り、レンズをでてから自由空間を進み、2 枚目のレンズを通過してから更に自由空間を進み、スクリーンに当たるものである。図中の行列で、

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{bmatrix}$$

はそれぞれ、最初のレンズ、最初の自由空間、2 枚目のレンズ、および 2 番目の自由空間についての ABCD 行列である。これらの光学素子を次々に光線が通過するので、最終的にはこれらの行列の積で与えられる行列を入射光線の（位置、傾き）ベクトルに掛けることになる。

ここからは、様々な光学素子についての ABCD 行列を求める。

(1) 距離 l の自由空間：

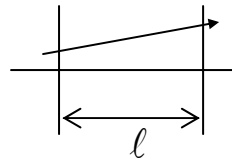


図1.6 長さ l の自由空間

入口の面で光線の光軸からの高さを r_1 、傾きを r_1' とすると、距離 l だけ離れた出口の面では

$$r_2 = r_1 + lr_1', \quad \text{および} \quad r_2' = r_1'$$

の関係がある。すなわち、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

であるので ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

(2) 薄肉レンズ：

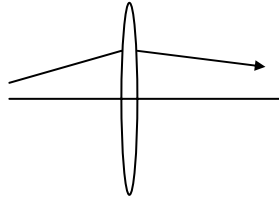


図1.7 焦点距離 f の薄肉レ

厚さが無視できる焦点距離が f のレンズに光線 (r_1, r_1') が入射したとする。レンズから出るときの光線の高さは変わらず $r_2 = r_1$ である。ところで、入射光線と同じ傾きでレンズの中心を通る光線は直進し、レンズから f の位置に置いた平面と高さ fr_1' で交差する。高さおよび傾きが r_1 と r_1' でレンズに入射する光線はこの平面上の同じ高さ fr_1' の位置で交差するので、この光線がレンズから出たときの傾きは $r_2' = (fr_1' - r_1)/f = -r_1/f + r_1'$ である。これを行列の形で書けば、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

であるので、レンズの ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

となる。凹レンズでは f として、負の値を用いる。

(3) 屈折率の界面(平面)での屈折：

屈折率 n_1 と n_2 の界面に光線 (r_1, r_1') が入射する。この光線は (r_2, r_2') として界面から出ていくとする。入射角と屈折角をそれぞれ θ_1 および θ_2 とすると、Snell の法則により、 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ であるが、入射角および屈折角が非常に小さい場合、 $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = r_1'$ および $\sin \theta_2 \approx r_2'$ と出来るので、Snell の法則は $n_1 r_1' = n_2 r_2'$ と表せる。これより、 $r_2' = n_1 r_1' / n_2$ である。今の場合 $r_2 = r_1$ であるので、ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{pmatrix}$$

と表せる。

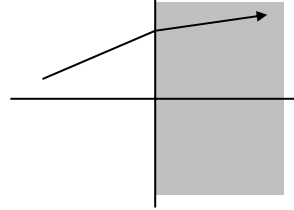


図1.8 屈折率の界面(平面)

(4) 屈折率の界面(球面)での屈折:

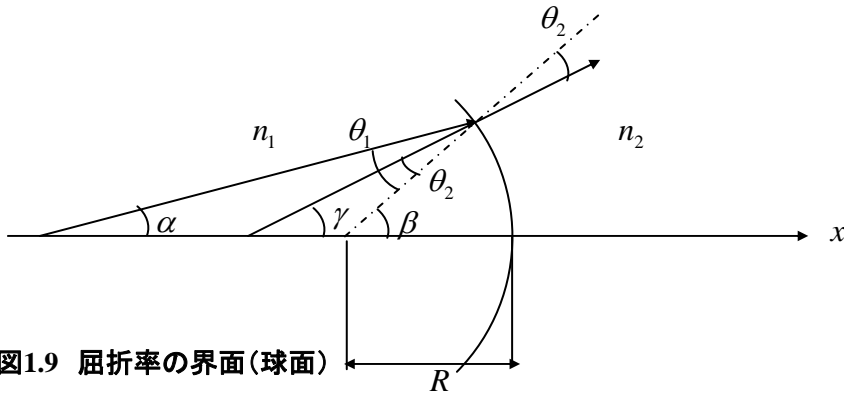


図1.9 屈折率の界面(球面)

屈折率 n_1 と n_2 の界面が半径 R の球面である場合を考える。球面の曲率中心が光線の進む方向と逆の方向、図 1.9 では球面に対して左側、の場合 R を正の値にとる。この面に光線 (r_1, r_1') が入射する。この光線は (r_2, r_2') として界面から出ていくとする。入射角と屈折角をそれぞれ θ_1 および θ_2 とすると、Snell の法則により、 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ である。ところで、図 1.9 を参照すると、 $\theta_1 = \beta - \alpha$ であり、 $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$ であること、および、 α と β が共に非常に小さく、 $\cos \alpha \approx 1$ 、 $\cos \beta \approx 1$ 、 $\sin \alpha \approx \tan \alpha = r'$ であり、また、 $\sin \beta = r_1/R$ であることを用いると、 $\sin(\beta - \alpha) = r_1/R - r_1'$ である。また、 $\theta_2 = \beta - \gamma$ 、および、 $\sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma$ 、 $\cos \gamma \approx 1$ 、 $\sin \gamma \approx \tan \gamma = r_2'$ などから、 $\sin(\beta - \gamma) = r_1/R - r_2'$ が得られる。これらを Snell の法則に代入すると、 $n_1(r_1/R - r_1') = n_2(r_1/R - r_2')$ となり、これから r_2' を表すことが出来る。

$$r_2' = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} r_1 + \frac{n_1}{n_2} r_1'$$

この結果と、 $r_2 = r_1$ を考慮すると ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

(5) 球面ミラー :

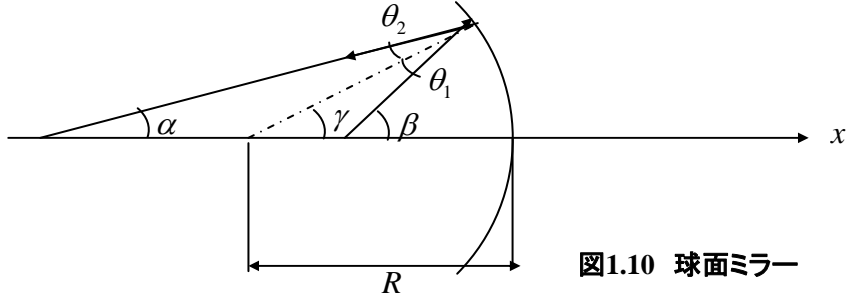


図1.10 球面ミラー

半径 R の球面に光線 (r_1, r_1') が入射する。この光線は (r_2, r_2') として反射面から反射されて出ていくとする。入射角および反射角をそれぞれ θ_1 および θ_2 とする。ここで、 $\theta_1 = \theta_2$ であることを利用するが、まず、 $\theta_1 = \beta - \gamma$ および $\theta_2 = \gamma - \alpha$ であることから、**図 1.10** を参照して、

$$\sin \theta_1 = \sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma = r_1' - r_1/R$$

および、
$$\sin \theta_2 = \sin(\gamma - \alpha) = \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha = r_1/R + r_2'$$

である。ここで、 $\cos \alpha \approx 1$ 、 $\cos \beta \approx 1$ 、 $\cos \gamma \approx 1$ 、 $\sin \beta \approx \tan \beta = r_1'$ 、 $\sin \gamma = r_1/R$ 、および $\sin \alpha \approx \tan \alpha = -r_2'$ を用いた。ここで、 r_2' は光線が進む方向に対して計算されるものであるので、 $\tan \alpha = -r_2'$ であることに注意する。

ここで、上の 2 式が等しいとして、 $r_2' = -\frac{2}{R} r_1 + r_1'$ が得られる。この結果と、 $r_2 = r_1$

を考慮すると ABCD 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

(6) 平方依存屈折率分布； この場合の ABCD 行列式の求め方についてはフェルマーの原理についての説明を参照されたい。

ABCD 行列を用いれば、光線がいろいろな光学素子を通じた後の光線の高さや傾きが求められる。例として、**厚肉レンズ**；2面の曲率半径が R 、面間隔が d であるレンズに光線 (r_1, r_1') が入射するとき、レンズから出てくる光線の r_2 と r_2' を求めてみよう。このときの ABCD 行列は次のようになる。

空気およびレンズの屈折率をそれぞれ 1 および n とする。最初、面 1 に入るが、この場合では(4)の行列で $n_1=1$ および $n_2=n$ とし、面 1 の曲率中心がレンズに対して光線の進む方向にあるから、曲率として $-R$ を代入する。面 2 では $n_1=n$ および $n_2=1$ とし、面 2 の曲率中心がレンズに対して光線と逆方向にあるから、曲率として R を代入する。さらにレンズの厚さ d の自由空間を光線が進むことを考えると、光線行列は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{nR} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(1-n)d}{nR} & \frac{d}{n} \\ \left(\frac{1-n}{R}\right)\left(2 + \frac{(1-n)d}{nR}\right) & 1 + \frac{(1-n)d}{nR} \end{pmatrix}$$

これより、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

により、レンズから出てくる光線の高さと傾きが求まる。

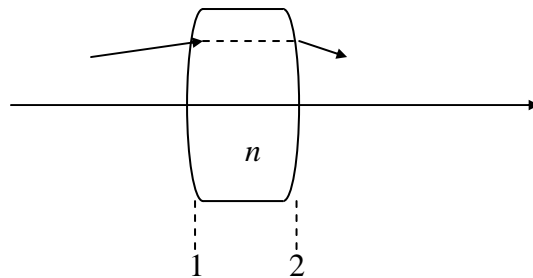


図1.11 厚肉レンズ

1.2 フェルマーの原理

屈折率が空間的に不均一であるとき、光はどのように進むのであろうか。光の進み方を可視化した説明法としてはホイヘンスの原理が知られている。ホイヘンスの原理を定量的に説明することでこの問題に答えようとするのが後述の**キルヒホッフの積分定理**である。この原理によれば、空間の任意の位置に於ける波動場は観測点を除く任意の空間領域での波動場情報を積分することで与えられるとするものであり、一種の因果律を提供する。こ

れとは別に、光の進み方を「光線」の軌跡で与え、光線が満たすべき条件を自然の原理として与えるものが「フェルマーの原理」である。この原理は天から与えられた原理というよりは、Maxwell 方程式系で予言される光の伝播の方向、つまりポインティングベクトルの方向を連ねることで光線を与えることと等価であることをあらかじめ注意されたい。

フェルマーの原理では、光線が任意の 2 点を結ぶとき、その経路は光学的行路長

$$L = \int_l \mathbf{n}(\mathbf{x}, y) ds$$

が極値を持つようにして与えられる。ここでの極値とは、通常は最小値である。この積分の意味は、2 点間をある曲線 l で結び、その曲線に沿って微小変位 ds だけ移動したとき、微小変位に屈折率をかけたものを加え合わせることを意味する。屈折率が 1 である真空中では、これは単純に曲線 l の長さである。屈折率に移動距離をかけたもの

$$nds$$

を光学的光路長という。

フェルマーの原理では 2 点間を結ぶ光学的光路長が最小になるように光線は進むということである。

それでは、このように光学的光路長を最小にするような光路をどのように求めるのだろうか。真空中での 2 点間を結ぶ最短光路は、この 2 点間を結ぶ直線であることは自明である。屈折率が異なる 2 種類の媒質が平面境界面で分離されているとして、一方の媒質中の A 点から片方の媒質中の B 点まで、光がたどる光路を求めてみよう。(図 1.12a) また、同一の媒質中の A 点から B 点まで、鏡面 M で反射して到達する光路を求めてみよう(図 1.12b)。図を参照して A 点から B 点までの光路長は

$$L = n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + n_2 \sqrt{g^2 + (d-x)^2}$$

である。ここで、 x を変化させて L を最小とする x の値を見つける。そのために、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{g^2 + (d-x)^2}} = 0$$

を要求するが、これは

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{n_2 (d-x)}{\sqrt{g^2 + (d-x)^2}}$$

を満たす x を求めることである。ところで、この関係は入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 を用いて次のようにあらわされる。

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

これは、屈折の法則（Snell の法則）に他ならない。

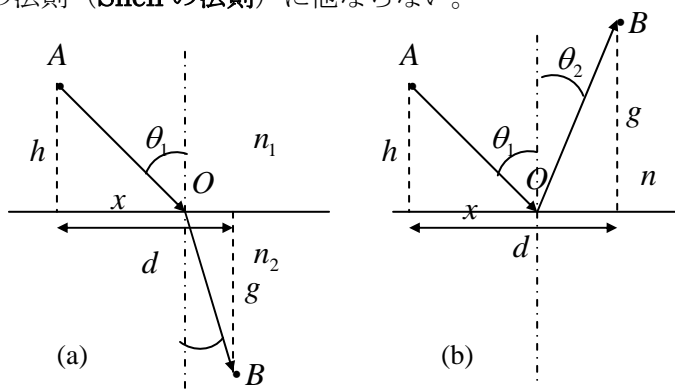


図 1.12 屈折および反射の法則

次に、同様の方法で A 点から B 点まで反射面で反射された光線の道筋を検討する。この場合の光路長は、上述の屈折の場合での光路長で $n_1 = n_2 = n$ と置いた式で与えられる。この結果

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \quad \text{あるいは} \quad \theta_1 = \theta_2$$

という反射の公式が得られる。

次に、屈折率が空間的に任意の分布をしている場合では、どのようにして光路を具体的に求めるのであろうか。図 1.13 を参照して考えよう。A 点から B 点までの光路長は

$$n(x, y) ds$$

を光路

$$l: y = y(x)$$

に沿って加えたものである。 n 中の y は光路を与える $y(x)$ であり、この関数 $y(x)$ を見つけることが目標である。ところで、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

であるので、 $n(x, y) ds$ を曲線 $y = y(x)$ に沿って加えていくということは、 x 軸上で

$$n(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

という関数を積分することに他ならない。つまり、

$$L = \int_{x_a}^{x_b} n(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

をいろいろな関数 $y = y(x)$ で計算し、この積分値が最小になるような関数 $y(x)$ を見つけ出すことである。このような作業を**変分法**という。尚、 L/c ; c は真空中の光速、は A 点から B 点までの所要時間を与えるので、要するに**最も所要時間の短い光路はどれか**という問になる。(自然は合理的だ)

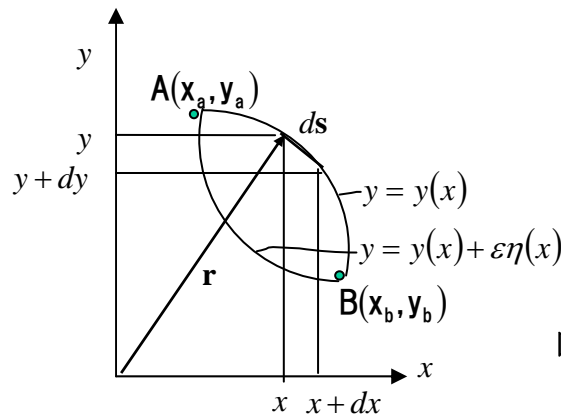


図 1.13 最短光路を見つける

ここで、関数 $y(x)$ が L を最小とする光路であると仮定する。この光路から少しだけ任意にずれた光路を $y(x) + \varepsilon\eta(x)$ という形で与える。 $\eta(x)$ は滑らかで微分可能な任意の関数で A 点と B 点で $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$ である関数である。こうすることで、関数 $y(x) + \varepsilon\eta(x)$ は A 点と B 点で $y(x)$ となる。 ε はいくらでも小さくできる任意のパラメータであり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで光路を $y(x)$ に一様に近づけることが出来る。

$$n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} = g(x, y, y') \quad \text{ここで} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

とおくと、この 2 つのパスに沿う光路長の差 (これを**変分**という)

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_{x_a}^{x_b} g(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx - \int_{x_a}^{x_b} g(x, y, y') dx \\ &= \int_{x_a}^{x_b} g(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') - g(x, y, y') dx \end{aligned}$$

は ε の関数とみなせる。ここで、 $g(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')$ で $Y = y + \varepsilon\eta$ 、 $Y' = y' + \varepsilon\eta'$ とおき、 ε のべき級数に展開する。

$$g(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') = g(x, y, y') + \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{Y=y} \left. \frac{dY}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left. \frac{\partial g}{\partial Y'} \right|_{Y'=y'} \left. \frac{dY'}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} \left(\frac{dY}{d\varepsilon} \right)^2 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial Y \partial Y'} \frac{dY}{d\varepsilon} \frac{dY'}{d\varepsilon} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y'^2} \left(\frac{dY'}{d\varepsilon} \right)^2 \varepsilon^2 + \dots \\
& = g(x, y, y') + \frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \eta \varepsilon + \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' \varepsilon \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} \eta^2 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial Y \partial Y'} \eta \eta' \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y'^2} \eta'^2 \varepsilon^2 + \dots
\end{aligned}$$

したがって、

$$\delta L = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \eta \varepsilon + \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' \varepsilon \right) dx + \varepsilon^2(P)$$

と書ける。ここで、 $\varepsilon^2(P)$ は ε の 2 次以上の項である。光路 $y(x)$ が光路長 L に極小値を与えるということは

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{に於いて} \quad \frac{\delta L}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

であることを要求する。

$$\frac{\delta L}{\varepsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \eta + \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' \right) dx + \varepsilon(P)$$

であるので、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\varepsilon} = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \eta + \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' \right) dx$$

であり、これより、

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \eta + \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' \right) dx = 0$$

であることが要求される。この積分の第 2 項は部分積分により

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta' dx = \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta \Big|_{x=x_a}^{x=x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta \right) dx = - \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \eta \right) dx$$

ここで、 $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$ を用いた。

ところで、 $\frac{\partial g}{\partial Y} \Big|_{Y=y} \equiv \frac{\partial g}{\partial y}$ および $\frac{\partial g}{\partial Y'} \Big|_{Y'=y'} \equiv \frac{\partial g}{\partial y'}$ のことであるので、結局

$$\int_{x_a}^{x_b} \eta \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) dx = 0$$

が得られる。 η は任意の関数であるので、上記の積分がゼロであるためには、

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} = 0$$

であることが要求される。これは変分法におけるオイラー (Euler) の方程式と言われる。ここでの結論は、最短の光学的光路長を与える光路 $y(x)$ は上記オイラー方程式 (微分方程式) を満たすものとして求めることができる。

フェルマーの原理をいくつかの屈折率分布に対して適用し、光路を求める。

(1) 真空中の2点を通る光路：

この場合、 $n(x, y)\sqrt{1+y'^2} = g(x, y, y')$ において、 $n=1$ とする。したがって、

$g = \sqrt{1+y'^2}$ は y' を陽に含む関数である。したがって、

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

であり、 y' は x の関数であることを考慮すると、オイラー方程式は

$$-\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

となる。これは x について積分できて、 C_1 を定数とすると、

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

が得られる。この式を y' について解くと、

$$y' = \pm \frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}} = C_2$$

となる。ただし、定数項を C_2 とおいた。この微分方程式を解くと、

$$y = C_2x + C_3$$

が得られる。ただし、 C_3 は別の定数である。これが光学的な光路長を最短とする光路を与える関数 $y(x)$ となる。これはあきらかに直線であり、定数 C_2 と C_3 は 2 点 A および B を通過するという条件から決定できる：

$$C_2 = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} \quad C_3 = \frac{x_a y_b - x_b y_a}{x_a - x_b}$$

(2) 屈折率が垂直方向に線形に依存する場合：

例えば地表付近の空気密度が地上からの高さ y に対して減少するために、空気の屈折率が $n = n_0(1 - \alpha y)$ のように変化する。(下図参照)

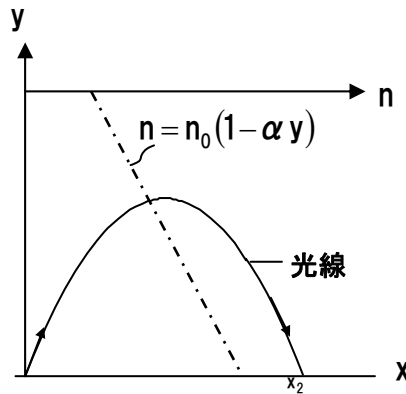


図 1.14 放物線を描く光線

ここで、 n_0 は地表における屈折率である。実際には $y \approx 1000m$ で $\alpha y \approx 0.0001$ 程度であり、したがって、 $\alpha \approx 10^{-8}$ という小さな値である。ここで、地表近くを伝播する光線の光路を求めよう。地表が水平であるとし、地表に沿って光軸 (x 軸) をとる。今の場合、光路として光軸近傍を伝播するものを考えるが、これを近軸近似といい、具体的には $y' \ll 1$ とか $y'' \ll 1$ などの近似を適用する。まず、オイラー方程式を書き出す。

$$g = n\sqrt{1 + y'^2}$$

としてオイラー方程式に代入すると、

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial n}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

であることより、

$$\sqrt{1+y'^2} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

となるが、近軸近似により、 $y' \ll 1$ および $y'^2 \ll 1$ であるので、オイラー方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dx}(ny') = 0$$

と近似的に表せる。さらに、屈折率 $n = n_0(1 - \alpha y)$ を代入して、

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\alpha n_0 \quad \text{および} \quad \frac{d}{dx}(ny') = \frac{d}{dx} n_0(1 - \alpha y)y' = -\alpha n_0 y'^2 + n_0(1 - \alpha y)y''$$

$$\text{より、} \quad \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dx}(ny') = -\alpha n_0 + \alpha n_0 y'^2 - n_0(1 - \alpha y)y'' = 0$$

となる。ここで、 $\alpha y \ll 1$ および $y'^2 \ll 1$ の条件を考慮することで、

$$n_0 y'' = -\alpha n_0$$

$$\text{となる。この解は} \quad y = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + C_1 x + C_2$$

であり、光路は上に凸な放物線を描く。ここで C_1 と C_2 は積分定数である。

原点 $(0,0)$ から上方へ角度 θ で光線を発射すると、 $dy/dx|_{x=0} = \tan \theta$ であるので

$C_1 = \tan \theta$ 、および、 $C_2 = 0$ が得られ、光路として

$$y = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + x \tan \theta$$

が得られる。

また、 $(0,0)$ および $(x_b, 0)$ を通過する光路を求めてみると、 $C_1 = \alpha x_b/2$ およ

び $C_2 = 0$ となり、光路は

$$y = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\alpha x_b x$$

となる。

この具体例としては層気楼がある。2点間の距離として $x_b = 100\text{km}$ とした場合、光

路の最高点は地表から $y_{\max} = \alpha x_b^2 / 4 = 25\text{m}$ の高度になる。

(3) 屈折率が y の二乗に比例する場合：

屈折率が

$$n = n_0(1 - \alpha y^2)$$

で与えられる場合を考える。これは、屈折率のダクトと呼ばれるもので、光ファイバーを通る光、電離層プラズマを伝播する電波などで見られるものである。(下図参照)

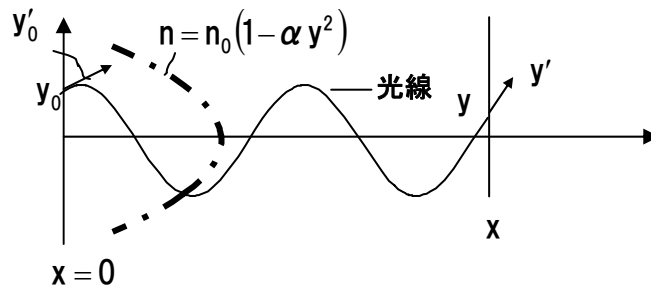


図 1.15 二次関数型屈折率分布に捕捉された光線

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -2n_0\alpha y \quad \text{および} \quad \frac{d}{dx}(ny') = -2n_0\alpha yy'^2 + ny'' = -2n_0\alpha yy'^2 + n_0(1 - \alpha y^2)y''$$

をオイラー方程式に代入して、

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d}{dx}(ny') = -2n_0\alpha y + 2n_0\alpha yy'^2 - n_0(1 - \alpha y^2)y'' = 0$$

を得るが、ここで、 $y'^2 \ll 1$ および $\alpha y^2 \ll 1$ の条件を賦課すると、上記方程式は

$$-2\alpha y - y'' = 0 \quad \text{となり、これより}$$

$$y'' = -2\alpha y$$

が光路を決定する方程式として得られる。これは単振動を記述する微分方程式と形式的に同じであり、一般解は

$$y = A \sin(\sqrt{2\alpha}x + \varphi)$$

である。ここで、 A および φ は任意の定数である。これらは境界条件で決められる。

$x=0$ で $y = y_0$ および $y' = y'_0$ であれば、 $A \cos \varphi = y'_0 / \sqrt{2\alpha}$ および $A \sin \varphi = y_0$ であるので、

$$\begin{aligned} y &= A \sin(\sqrt{2\alpha}x + \varphi) = A \sin \sqrt{2\alpha}x \cos \varphi + A \cos \sqrt{2\alpha}x \sin \varphi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sin \sqrt{2\alpha}x \right) y'_0 + (\cos \sqrt{2\alpha}x) y_0 \end{aligned}$$

が得られる。更に、これを微分して

$$y' = (\cos \sqrt{2\alpha}x) y'_0 - (\sqrt{2\alpha} \sin \sqrt{2\alpha}x) y_0$$

であるので、この結果を光線行列表示としてまとめると

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2\alpha}x & \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sin \sqrt{2\alpha}x \\ -\sqrt{2\alpha} \sin \sqrt{2\alpha}x & \cos \sqrt{2\alpha}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

と与えられ、任意の位置 x に於ける光線の位置と方向が決められる。