第１回　微分方程式とは？

人間の生活を含む自然界での物量の変化はその他の物量と関連しあって、時間とともに変化していく。あるいは、時間を固定した瞬間においても物量どうしが空間的に連結した形で変化していることが多い。具体的な問題として、人口の増加を考える。人口をxとする。微小時間dtとすると、この時間内に経済状況が変わらなければ、この時間内での人口の増加を dxと書くならば、人口増加dxはその時の人口そのものと微小時間dtの積に比例するはずである。したがって、

$$dx = \alpha x dt \qquad (1)$$

と書ける。あるいは（1）を書き直して、$\frac{dx}{dt} = \alpha x$ (2)

と書いたものを微分方程式という。広い意味で、微分方程式とは微分係数を含む方程式で、その方程式を満たす関数、いまでは時間の関数としてのxを求めることを、微分方程式を解くという。このxを微分方程式（1）あるいは（2）の解という。
それでは、(2）の解としてどのような形の関数を予想すればよいだろうか。(2）が言うことは、ある関数xをtで微分すると自分自身のα倍になるということである。微分して変化しない関数、あるいはもとの関数を返す関数としては、

$$x = e^t \qquad (3)$$

があるが、微分されて自分自身のα倍になるためには、

$$x = e^{\alpha t} \qquad (4)$$

がある。これが微分方程式（2）の解であることは、代入して確認できる。さらに、(4）のかわりに、任意のゼロでない定数cを用いて、

$$x = ce^{\alpha t} \qquad (5)$$

も微分方程式の解であり、より一般性を持つ。このような一般性を持つ階を微分方程式の一般階と言い、定数cを積分定数という。この解によれば、人口は指数関数的に増大することになるが、実際はどこかでバランスするので、現実を反映する微分方程式は（2）とは異なるはずである。また、特定の時間での人口が与えられている場合、その条件を（5）式に適用することで c を具体的な数値で決定でき、(5) 式が具体的に決まる。例えば、$t = 0$ で $x = 2$ （アダムとイヴ）とすれば t 秒後の人口は $x = 2e^{\alpha t}$ となる。

　更に、死亡率を β とすれば、どのような微分方程式が成り立つだろうか。時間的に人口が変かするありさまを図示しなさい。また、人口増加率 α は定数ではなく、人口の増加に伴って減少する場合、例えば、

$$\alpha = \alpha_0\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$$

の場合、どのような微分方程式が書けるか。

　次に、似た現象として、放射性同位体の崩壊による放射能の減衰を考える。今、$x[kg]$の

放射性同位体（例えばセシウム 137 など）があるとする。放射性同位体が単位時間あたりに崩壊して別の物質に変わる割合は αx と表わすことができる。したがって、単位時間にこの放射性同位体が減少する割合は $-\alpha x$ である。このことから、(1) のような微分方程式を立てて、一般階を求め、時間的にどのように変化するか、図示しなさい。

質量がmの質点が一定の加速度aで一次元運動をしているとする。ある時刻tにおける速度をvとする。微小時間dtの間の速度の増加をdvとして微分方程式を立てて、vを求めなさい。また、微小時間dtの間の位置の増加をdxとして微分方程式を立てて、xを求めなさい。

同様に、物体がポテンシャル場の中で一次元運動する場合を考える。物体が距離dx移動すると、この物体はポテンシャルの変化を感じる。この時のポテンシャルの変化をdUとする。ポテンシャルの変化は $-(力)\times dx$ で与えられるが、物体に働く力が物体の位置xに対して $-kx$ で与えられる場合、ポテンシャルが満たす微分方程式を立てて、解を求めなさい。