第二章　ＣＰＴ対称性Ⅱ

－局所場の理論：スカラーの場合－

第一節：４つの仮定

量子力学の仮説の正当性

- ●物理状態・・・ヒルベルト空間のベクトル
- ●観測操作・・・自己共役なオペレータ

理論の対称性

- ●ローレンツ不変性

エネルギー・運動量テンソルの妥当性

●並進演算子としての４次元運動量P_μ

$$\left[P_\mu, P_\nu\right]=0,\ \left[P_\mu, F(x)\right]=i\partial_\mu F(x)\quad \left(F(x):\text{時間に陽に依存しないハイゼンベルグ演算子}\right)$$

$$P_\mu\left|p,\alpha\right\rangle = p_\mu\left|p,\alpha\right\rangle$$

〇唯一つの真空状態$\left|0\right\rangle$

$$U(a,\Lambda)\left|0\right\rangle=\left|0\right\rangle\ \left(U(a,\Lambda):\text{並進}a\text{＋ローレンツ回転}\Lambda\right)$$

〇$P_\mu\left|0\right\rangle = M_{\mu\nu}\left|0\right\rangle = 0$

〇真空状態$\left|0\right\rangle$以外の状態は、$p^2 \geq 0$ with $p_0 > 0$

局所理論:空間的に離れた２点間で互いの干渉はない

●スカラー場$\phi(x)$

$$U(a,\Lambda)\phi(x)U^{-1}(a,\Lambda)=\phi(\Lambda x+a)$$

●微視的局所性(Microscopic causality)

$$\left[\phi(x),\phi(x')\right]=0 \text{ for } (x-x')^2<0$$

第二節：真空期待値（Wightman Formulation）

場の理論は、以下の真空期待値（Wightman 関数）を用いて再定式化可能である：

$$W^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left\langle 0\right|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\left|0\right\rangle$$

これは、厳密には線形汎関数として理解される：

$$W^{(n)}[f]=\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n W^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)$$
$$\Leftrightarrow W^{(n)}[f_1+f_2]=W^{(n)}[f_1]+W^{(n)}[f_2],\ W^{(n)}[\alpha f]=\alpha W^{(n)}[f]$$

ここに、fは無限回微分可能な関数であり、$4n$-次元内の一定の領域外では０になる。これは、物理的な場が、この関数fを用いて

$$\phi(f)=\int d^4x f(x)\phi(x)$$

と定義できることに依っている。また、$\phi(f)\to 0$ as $f\to 0$は明らかである。従って、真空期待値の

$$W_\phi[f]=\langle 0|\phi(f)|0\rangle$$

は、超関数として理解できる。超関数では、いかなる$f\,(=f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots)$にたいしても、$\{f_n\}$が０に収束するシリーズであるとき、それに従って $W_\phi[f]$も０に収束する。真空期待値：

$$W^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle$$

は、各々の変数について超関数

$$W^{(n)}[f_1,f_2,\cdots,f_n]=\langle 0|\phi(f_1)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)|0\rangle$$

である。以降、厳密な超関数による定義の代わりに $W^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$を用いて議論する。

第三節：真空期待値としてのWightman関数

Relativistic Invariance

場の理論のローレンツ不変性から、

$$U(a,\Lambda)|0\rangle=|0\rangle,\ U(a,\Lambda)\phi(x)U^{-1}(a,\Lambda)=\phi(\Lambda x+a)$$

これから、

$$\begin{aligned}W^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle\\&=\langle 0|U^{-1}(a,\Lambda)U(a,\Lambda)\phi(x_1)U^{-1}(a,\Lambda)U(a,\Lambda)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)U^{-1}(a,\Lambda)U(a,\Lambda)|0\rangle\\&=\langle 0|U(a,\Lambda)\phi(x_1)U^{-1}(a,\Lambda)U(a,\Lambda)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)U^{-1}(a,\Lambda)|0\rangle\\&=\begin{cases}\langle 0|\phi(\Lambda x_1+a)\phi(\Lambda x_2+a)\cdots\phi(\Lambda x_n+a)|0\rangle & (\text{時間反転の無いとき})\\ \left[\langle 0|\phi(\Lambda x_1+a)\phi(\Lambda x_2+a)\cdots\phi(\Lambda x_n+a)|0\rangle\right]^\dagger & (\text{時間反転のあるとき})\end{cases}\end{aligned}$$

つまり

$$W^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}W^{(n)}(\Lambda x+a_1,\Lambda x_2+a,\cdots,\Lambda x_n+a) & (\text{時間反転の無いとき})\\ W^{(n)\dagger}(\Lambda x+a_1,\Lambda x_2+a,\cdots,\Lambda x_n+a) & (\text{時間反転のあるとき})\end{cases}$$

がわかる。並進不変性より、$W^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$は、差のみの関数：$x_i-x_j$（$=\xi_i$）になる：

$$W^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=W^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})\ \left(\xi_i=x_i-x_{i+1}\text{ for }i=1,\cdots,n\text{-}1\right)$$

その結果、ローレンツ回転の自由度は、

$$W^{(n)}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\right)=W^{(n)}\left(\Lambda\xi_1,\Lambda\xi_2,\cdots,\Lambda\xi_{n-1}\right)$$

で表される。

Hermiticity

スカラー場なので、

$$\left\langle 0\middle|\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle=\left\langle 0\middle|\phi^\dagger\left(x_1\right)\phi^\dagger\left(x_2\right)\cdots\phi^\dagger\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle^\dagger$$

ここで、特に中性スカラー場である

$$\left\langle 0\middle|\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle=\left\langle 0\middle|\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle^\dagger$$

とつまり、

$$W^{(n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=W^{(n)\dagger}\left(x_n,\cdots,x_2,x_1\right)\ \text{for neutral scalars}$$

である。

Local Commutativity

また、$W^{(n)}$がフーリエ変換可能であるとすると、

$$W^{(n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)\dagger}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)$$

である。これを、物理的な場を使って導くことができる。物理的な場は、$p^2\geq 0\ \&\ p_0>0$なので、先ほどの４次元運動量の固有状態を用いて

$$\sum_{\{p,\alpha\}}\int\left|p,\alpha\right\rangle\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p^0\left(2\pi\right)^3}\left\langle p,\alpha\right|=1\ \left(p^0=E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+p^2}\right),\ \left\langle p,\alpha\middle|p',\alpha'\right\rangle=2p^0\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\right)\delta_{\alpha\alpha'}$$

を満たす。ここで、

$$\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p^0}=\int d^4p\,\theta\left(p^0\right)\delta\left(p^2-m^2\right)\ \text{with}\ m^2\geq 0$$

書けるので、

$$\phi(x)=\exp(iPx)\phi(0)\exp(-iPx)$$

より、

$$\begin{aligned}W^{(n)}\left(x_1,\cdots,x_n\right)&=\left\langle 0\middle|\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle=\left\langle 0\middle|\exp\left(iPx_1\right)\phi(0)\exp\left(-iPx_1\right)\cdots\exp\left(iPx_n\right)\phi(0)\exp\left(-iPx_n\right)\middle|0\right\rangle\\&=\sum_{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}}\int d^4p_1\cdots d^4p_{n-1}\prod_{i=1,\cdots n-1}\frac{\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2-m^2\right)}{\left(2\pi\right)^3}\\&\quad\left\langle 0\middle|\phi(0)\exp\left(-iPx_1\right)\middle|p_1,\alpha_1\right\rangle\left\langle p_1,\alpha_1\middle|\exp\left(iPx_2\right)\phi(0)\exp\left(-iPx_2\right)\middle|p_2,\alpha_2\right\rangle\\&\quad\cdots\left\langle p_{n-2},\alpha_{n-2}\middle|\exp\left(iPx_{n-2}\right)\phi(0)\exp\left(-iPx_{n-2}\right)\middle|p_{n-1},\alpha_{n-1}\right\rangle\left\langle p_{n-1},\alpha_{n-1}\middle|\exp\left(iPx_n\right)\phi(0)\middle|0\right\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int d^4p_1\cdots d^4p_{n-1}\sum_{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}}\prod_{i=1,\cdots n-1}\frac{\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2-m^2\right)}{\left(2\pi\right)^3}\left\langle 0\middle|\phi(0)\middle|p_1,\alpha_1\right\rangle\left\langle p_1,\alpha_1\middle|\phi(0)\middle|p_2,\alpha_2\right\rangle\\
&\qquad\cdots\left\langle p_{n-2},\alpha_{n-2}\middle|\phi(0)\middle|p_{n-1},\alpha_{n-1}\right\rangle\left\langle p_{n-1},\alpha_{n-1}\middle|\phi(0)\middle|0\right\rangle\\
&\qquad\cdot\exp\left(-ip_1\left(x_1-x_2\right)\right)\cdot\exp\left(-ip_2\left(x_2-x_3\right)\right)\cdots\exp\left(-ip_{n-1}\left(x_{n-1}-x_n\right)\right)\\
&=\int d^4p_1\cdots d^4p_{n-1}\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^\mu\right)
\end{aligned}
$$

になる。従って、

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)=&\sum_{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}}\prod_{i=1,\cdots n-1}\frac{\theta\left(p_i^0\right)\delta\left(p_i^2-m^2\right)}{\left(2\pi\right)^3}\left\langle 0\middle|\phi(0)\middle|p_1,\alpha_1\right\rangle\left\langle p_1,\alpha_1\middle|\phi(0)\middle|p_2,\alpha_2\right\rangle\\
&\cdots\left\langle p_{n-2},\alpha_{n-2}\middle|\phi(0)\middle|p_{n-1},\alpha_{n-1}\right\rangle\left\langle p_{n-1},\alpha_{n-1}\middle|\phi(0)\middle|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

と表される。以上から、

$$
W^{(n)}\left(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)
$$

である。そして、定義より

$$
\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)=0\text{ unless }p_i^2\geq 0\text{ and }p_i^0>0
$$

である。

さて、

$$
W^{(n)}\left(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)
$$

は、収束する関数かどうか不明なので、定義をはっきりさせるため、$\exp(-\varepsilon p)$ as $p\to\infty$の因子を導入し収束をよくする。そのため、この関数を複素平面に解析接続をする：

$$
W^{(n)}\left(\xi_1-i\eta_1,\cdots,\xi_{n-1}-i\eta_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\left(\xi-i\eta\right)_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)
$$

が収束する積分であるとする。従って、条件は、

$$
p_{j\mu}\eta_j^\mu>0
$$

になる。従って、

$$
\eta_i^2>0\ \left(\text{in the future light cone}\right),\ \eta_i^0>0
$$

であれば、常に満たされる。この(ξ_i, η_i)で張られる 8(n-1)次元の領域を「Future tube」と呼んでいる。複素変数を$\zeta_i=\xi_i-i\eta_i$とすると、

$$
-\infty<\mathcal{R}e\,\zeta_i<\infty,\ \left(\mathcal{I}m\,\zeta_i\right)^2>0\text{ and }\mathcal{I}m\,\zeta_i^0\left(=-\eta_i^0\right)<0
$$

複素変数の Wightman 関数は

$$
W^{(n)}\left(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\zeta_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)
$$

であり、収束する関数で解析的である。つまり、変数ζ_iの収束級数として展開できる。ここで、本来の Wightman 関数は、$\eta_{i\mu}\to(0, 0, 0. 0)$で定義されるが、ここでは$\eta^2>0,\ \eta^0>0$より$\eta_{i\mu}=(0, 0, 0. 0)$と取ることはできないので

$$W\left(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=W\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\right)\ \left(\text{on the neighborhood boundary at }\eta\to 0\right)$$

と、ξ_i,は限りなく実数に近い複素数としてのみ可能で、Wightman 関数は境界上の値として定義される。Wightman 関数が実変数を取るには、もう少し工夫が必要になる。次の節で論ずる。

微視的局所性

$$\left[\phi(x),\phi(x')\right]=0\text{ for }\left(x-x'\right)^2<0$$

よりは、

$$W^{(n)}\left(x_1\cdots,x_j,x_{j+1},\cdots,x_n\right)=W^{(n)\dagger}\left(x_1\cdots,x_{j+1},x_j,\cdots,x_n\right)\text{ for }\left(x_j-x_{j+1}\right)^2<0$$

である。これも、解析接続により複素変数の Wightman 関数に拡張される。

Positive Definiteness

このようにして作られた真空と超関数を用いて、ヒルベルト空間のベクトルを作ることができれば、観測可能な物理を記述するには、そのノルムは正定値に限る。従って、

$$\left\|\alpha_0 f_0\left|0\right\rangle+\alpha_1\int d^4x_1 f_1\left(x_1\right)\phi\left(x_1\right)\left|0\right\rangle+\cdots+\alpha_n\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n f_1\left(x_1,\cdots,x_n\right)\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\left|0\right\rangle+\cdots\right\|^2\geq 0$$

各項を分解すれば

$$\sum_{i,j}\alpha_i^*\alpha_j\int d^4x_1\cdots\int d^4x_i\int d^4y_1\cdots\int d^4y_j f_i^*\left(x_1,\cdots,x_i\right)W^{(i+j)}\left(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j\right)f_j\left(y_1,\cdots,y_j\right)\geq 0$$

を得ることになる。これが、Wightman 関数への重要な拘束条件になる。

以上の条件：

１）Relativistic Invariance、２）Hermiticity、３）Local Commutativity、４）Positive Definiteness が満たされると、真空期待値とみなすことができる Wightman 関数が存在し、ヒルベルト空間を構成できて、場の理論を再現する。

第四節：複素変数の Wightman 関数

複素ローレンツ変換駆使して実変数化する。Wightman 関数のローレンツ変換

$$W^{(n)}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\right)=W^{(n)}\left(\Lambda\xi_1,\Lambda\xi_2,\cdots,\Lambda\xi_{n-1}\right)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
&W^{(n)}\left(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)\\
&=W^{(n)}\left(\Lambda\xi_1,\cdots,\Lambda\xi_{n-1}\right)=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\left(\Lambda\xi_j\right)^\mu\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)\\
&\qquad\Leftarrow\Lambda p_j'=p_j,d^4p_j'=d^4p_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int d^4p_1'\cdots\int d^4p_{n-1}'\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}\left(\Lambda p_j'\right)\left(\Lambda\xi_j\right)^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1',\cdots,\Lambda p_{n-1}'\right)\\
&=\int d^4p_1'\cdots\int d^4p_{n-1}'\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}'\xi_j^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1',\cdots,\Lambda p_{n-1}'\right)\\
&=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\xi_j^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1,\cdots,\Lambda p_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)=\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1,\cdots,\Lambda p_{n-1}\right)
$$

である。これを複素変数の Wightman 関数に代入すると、逆の式変形を辿れば・・・

$$
\begin{aligned}
W^{(n)}\left(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1}\right)&=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\zeta_j^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)\\
&=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}\zeta_j^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1,\cdots,\Lambda p_{n-1}\right)\\
&=\int d^4p_1\cdots\int d^4p_{n-1}\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}\left(\Lambda p_j\right)_{\mu}\left(\Lambda\zeta_j\right)^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(\Lambda p_1,\cdots,\Lambda p_{n-1}\right)\\
&\overset{p'=\Lambda p}{=}\int d^4p_1'\cdots\int d^4p_{n-1}'\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1}p_{j\mu}'\left(\Lambda\zeta_j\right)^{\mu}\right)\tilde{W}^{(n)}\left(p_1',\cdots,p_{n-1}'\right)\\
&=W^{(n)}\left(\Lambda\zeta_1,\cdots,\Lambda\zeta_{n-1}\right)\ \text{for }\Lambda\text{:実数行列}
\end{aligned}
$$

従って、

$$
W^{(n)}\left(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=W^{(n)}\left(\Lambda\zeta_1,\cdots,\Lambda\zeta_{n-1}\right)
$$

但し、ζ_iは複素数なので、ローレンツ変換も複素数に拡張しなければならない：

$$
\Lambda_c^T g\Lambda_c=g\ \text{ with }\det\Lambda_c=1,\ g_{\mu\nu}\text{=diag.}(1,-1,-1,-1)\ \left(\Lambda_c\text{:複素行列 in }SO(4,\mathbb{C})\right)
$$

である。ところで、この変換により、ζ_iは$\Lambda_c\zeta_i$に移行するがこのとき、

$$
\eta^2>0\ (\text{in the future light cone}),\ \eta^0>0
$$

は、ζ_i □$\Lambda_c\zeta_i$に伴い

$$
\zeta=\xi-i\eta\Rightarrow\Lambda_c\zeta=\Lambda_c\xi-i\Lambda_c\eta=\mathcal{Re}\left(\Lambda_c\xi-i\Lambda_c\eta\right)+i\mathcal{Im}\left(\Lambda_c\xi-i\Lambda_c\eta\right)=\xi'-i\eta'
$$

と変更を受けるので、複素数虚数部のη'がもはや

$$
\eta'^2>0\ (\text{in the future light cone}),\ \eta'^0>0
$$

を満たすとは限らないが、この場合には、

$$
W^{(n)}\left(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=W^{(n)}\left(\Lambda_c\zeta_1,\cdots,\Lambda_c\zeta_{n-1}\right)
$$

に従って解析接続をする。逆に、ζ_iは future tube に限られ、その定義により、$\mathcal{Im}(\zeta_i)>0$ なので、実数値は取れない。ところが、$\Lambda_c\zeta_i$（Λ_c：複素行列）は、いかなる値も取れるので、実数値もとれる。実際、実数値をρとすると

$$
\Lambda_c\zeta_i=\rho_i\ \left(\rho_i\text{: 実数}\right)
$$

となるための必要条件を見るために、

$$\chi_\mu = \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \lambda_i \rho_{i\mu} \text{ with } \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 \ \& \ \lambda_i > 0$$

を考える。実数値は

$$\text{実数} = \left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \Lambda_c \zeta_i\right)^2 \overset{\Lambda_c^T g \Lambda_c = g}{=} \left(\sum_i \lambda_i \zeta_i\right)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \xi_i - i \sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2$$
$$= \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)^2 - \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2 - 2i \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)\left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)$$

より、虚数部が

$$\left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)\left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right) = 0$$

の必要がある。ところで、

$$\sum_i \lambda_i \eta_i = \text{time-like} \ \Leftarrow \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2 > 0 \Leftarrow \lambda_i > 0 \ \& \ \eta_i^2 > 0$$

なので、time-like vector と直交するのは

$$\sum_i \lambda_i \xi_i = \text{space-like} \Rightarrow \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)^2 < 0$$

である。従って、

$$\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)^2 - \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2 < 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i \rho_i = \text{space-like}$$

である（十分条件も満たすことがわかる。割愛する。）。以上から、複素変数の Wightman 関数から Wightman 関数を得るためには、ある複素ローレンツ変換があって

$$\boxed{\begin{array}{l} W^{(n)}(\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}) \equiv W^{(n)}(\Lambda_c \zeta_1, \cdots, \Lambda_c \zeta_{n-1}): \ (\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}) = \text{Jost points} \\ \text{for } \sum_i \lambda_i \rho_i : \text{実数} = \text{space-like}\left(\sum_i \lambda_i = 1 \ \& \ \lambda_i > 0\right) \ \& \ \zeta_i : \text{複素数} = \text{future tube} \end{array}}$$

になる。ただし、実変数(Jost points)には（ほぼ）space-like の性質がある。

第五節： CPT 定理

スカラー場にたいする変換性は・・・

$$\mathcal{U}_P \phi(x) \mathcal{U}_P^{-1} \equiv \phi(t, -\boldsymbol{x}), \ \mathcal{U}_T \phi(x) \mathcal{U}_T^{-1} \equiv \phi(-t, \boldsymbol{x}), \ \mathcal{U}_C \phi(x) \mathcal{U}_C^{-1} = \eta_C \phi^\dagger(x)$$
$$\Rightarrow \mathcal{U}_C \mathcal{U}_T \mathcal{U}_P \phi(x) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_T^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} = \mathcal{U}_C \mathcal{U}_T \phi(t, -\boldsymbol{x}) \mathcal{U}_T^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} = \mathcal{U}_C \phi(-t, -\boldsymbol{x}) \mathcal{U}_C^{-1} = \eta_C \phi^\dagger(-t, -\boldsymbol{x})$$

になる。従って、

$$\mathcal{U}_{CTP} \phi(x) \mathcal{U}_{CTP}^{-1} = \eta_C \phi^\dagger(-x) \Leftarrow |\eta_C|^2 = 1, \ \mathcal{U}_{CTP} \equiv \mathcal{U}_C \mathcal{U}_T \mathcal{U}_P$$

である。この CPT 変換は

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{U}_{CTP}\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\mathcal{U}_{CTP}^{-1}|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\mathcal{U}_C\phi_n(-x_n)\mathcal{U}_C^{-1}\cdots\mathcal{U}_C\phi_2(-x_2)\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_C\phi_1(-x_1)\mathcal{U}_C^{-1}|0\rangle = \langle 0|\eta_C\phi_n^\dagger(-x_n)\cdots\eta_C\phi_2^\dagger(-x_2)\eta_C\phi_1^\dagger(-x_1)|0\rangle \\
&\quad \overset{(\eta_C)^n=1}{=} \langle 0|\phi_n^\dagger(-x_n)\cdots\phi_2^\dagger(-x_2)\phi_1^\dagger(-x_1)|0\rangle = \langle 0|\phi_1(-x_1)\phi_2(-x_2)\cdots\phi_n(-x_n)|0\rangle^\dagger
\end{aligned}
$$

CPT 変換により

$$\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n^\dagger(-x_n)\cdots\phi_2^\dagger(-x_2)\phi_1^\dagger(-x_1)|0\rangle$$

ここで、新たに、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle$$

とすると、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}(-x_n,\cdots,-x_2,-x_1)$$

並進不変性より

$$
\begin{aligned}
&W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) \\
&\Leftarrow \xi_1 = x_1 - x_2 \xrightarrow{x_1\to -x_n,\, x_2\to -x_{n-1},} -x_n + x_{n-1} = \xi_{n-1},\ \text{etc.} \\
&W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(-x_n,\cdots,-x_2,-x_1) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1)
\end{aligned}
$$

つまり、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1)$$

になる。これを導くのがこの節の目的である。

$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$ は $\zeta = \xi - i\eta$ with $\eta^2 \ge 0$ and $\eta^0 > 0$ を用いて数学的に厳密に定義され

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})\ \ (\text{on the neighborhood boundary at } \eta\to 0)$$

複素ローレンツ化すると・・・特別な Λ_c^0 が存在して

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\Lambda_c^0\zeta_1,\Lambda_c^0\zeta_2,\cdots,\Lambda_c^0\zeta_{n-1}) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1})\ \begin{pmatrix}\text{space-like } \sum_i \lambda_i\rho_i \text{ with } \sum_i \lambda_i = 1\ \&\ \lambda_i > 0\ \&\ \zeta_i \\ \text{in thefuture tube (Jost points)}\end{pmatrix}$$

を導く。複素ローレンツ変換は、$\det\Lambda_c = 1$ and $\Lambda_c^T g \Lambda_c = g$ を満たすので、$\Lambda_c = -1$ も含んでいる：

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda_{c0}^0)^2 = 1 + \textstyle\sum_{i=1}^3 (\Lambda_{c0}^i)^2 = \text{any values because } \Lambda_{c0}^i \text{ are complex} \Rightarrow \Lambda_{c0}^0 = \pm 1 \text{ are both included} \\
&(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \textstyle\sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \ge 1 \text{ because } \Lambda_0^i \text{ are real} \Rightarrow \Lambda_0^0 = +1 \text{ or } -1
\end{aligned}
$$

従って、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\Lambda_c\zeta_1,\Lambda_c\zeta_2,\cdots,\Lambda_c\zeta_{n-1}\right)=W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(-\zeta_1,-\zeta_2,\cdots,-\zeta_{n-1}\right)$$

さらに、特別なΛ_c^0により、$\rho_i=\Lambda_c^0\zeta_i$より

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}\right)=W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(-\rho_1,-\rho_2,\cdots,-\rho_{n-1}\right)$$

を導く。

Hermiticity より

$$\begin{aligned}W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n *}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)&=\left\langle 0\middle|\phi_1\left(x_1\right)\phi_2\left(x_2\right)\cdots\phi_n\left(x_n\right)\middle|0\right\rangle^\dagger=\left\langle 0\middle|\phi_n^\dagger\left(x_n\right)\cdots\phi_2^\dagger\left(x_2\right)\phi_1^\dagger\left(x_1\right)\middle|0\right\rangle\\&=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}\left(x_n,\cdots,x_2,x_1\right)\end{aligned}$$

なので、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger *}\left(-\xi_{n-1},\cdots,-\xi_2,-\xi_1\right)$$

を得る。これを解析接続して

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger *}\left(-\zeta_{n-1}^*,\cdots,-\zeta_2^*,-\zeta_1^*\right)$$

特別なΛ_c^0により、$\rho_i=\Lambda_c^0\zeta_i$より

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger *}\left(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1\right)$$

をえる。$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}\right)=W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(-\rho_1,-\rho_2,\cdots,-\rho_{n-1}\right)$と組み合わせると

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger *}\left(\rho_{n-1},\cdots,\rho_2,\rho_1\right)$$

TCP 定理の結果を解析接続する。

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}\left(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1\right)$$

$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$が$x_i-x_{i+1}=\rho_i\left(=\text{Jost points}\right)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\left(x_i-x_{i+1}\right)_\mu\right)^2<0\ \text{with}\ \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i=1\ \&\ \lambda_i>0\Rightarrow\text{ほぼ、}\left(x_i-x_{i+1}\right)^2<0\text{の特別な場合のみ}$$

になるように選んでおけば、

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}\left(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}\right)=W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}\left(\rho_{n-1},\cdots,\rho_2,\rho_1\right)\overset{\text{特別な}\Lambda_c:\Lambda_c\rho_i=-\rho_i}{=}W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}\left(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1\right)$$

が成立する。ここまでで

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Hermiticity}: W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger *}(\rho_{n-1},\cdots,\rho_2,\rho_1)\\ &\text{解析接続されたCPT}: W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1)\end{aligned}}$$

以降は、中性スカラー場に絞って議論を進める。中性なので、Hermiticity は恒等的。CPT より

$$\text{CPT} \Rightarrow W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1) = W^{\phi_n\cdots\phi_2\phi_1}(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1}) = W^{\phi_n\cdots\phi_2\phi_1}(-\rho_{n-1},\cdots,-\rho_2,-\rho_1)\\ &\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\rho_{i\mu}\right)^2 <0 \text{ with } \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i = 1 \ \&\ \lambda_i>0\end{aligned}}$$

真空期待値で書き直すと、

$$\begin{aligned}&W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(-x_n,\cdots,-x_2,-x_1)\\ &\Rightarrow W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(-\xi_{n-1},\cdots,-\xi_2,-\xi_1) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(x_n,\cdots,x_2,x_1) = \langle 0|\phi_n(x_n)\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)|0\rangle\end{aligned}$$

ここで、$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が $x_i - x_{i+1} = \rho_i$ になるように選ぶと、この特別な x_i の組に対して、

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{解析接続されたCPT}: \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(x_n)\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)|0\rangle\\ &\text{for } \rho_i = x_i - x_{j+1} \text{ with } \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\rho_{i\mu}\right)^2 <0,\ \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i = 1 \ \&\ \lambda_i>0 \text{ at the Jost points}\end{aligned}}$$

を要請する。これを**弱局所可換性**と言う。一方、実際の CPT 定理は

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) = W^{\phi_n^\dagger\cdots\phi_2^\dagger\phi_1^\dagger}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1) = W^{\phi_n\cdots\phi_2\phi_1}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1)$$

なので、

$$\boxed{\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(-x_n)\cdots\phi_2(-x_2)\phi_1(-x_1)|0\rangle}$$

を示すことになる。

示したこと）

$$\begin{aligned}&\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(-x_n)\cdots\phi_2(-x_2)\phi_1(-x_1)|0\rangle\\ &\quad\Downarrow \text{解析接続 for } \rho_i = x_i - x_{j+1} \text{ with } \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\rho_{i\mu}\right)^2 <0,\ \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i = 1 \ \&\ \lambda_i>0\\ &\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(x_n)\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)|0\rangle\end{aligned}$$

示すこと）

$$\begin{aligned}&\text{弱局所可換性}: \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(x_n)\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)|0\rangle\\ &\qquad\qquad \text{for } \rho_i = x_i - x_{j+1} \text{ with } \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\rho_{i\mu}\right)^2 <0,\ \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i = 1 \ \&\ \lambda_i>0\\ &\Downarrow\ ???\\ &\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(-x_n)\cdots\phi_2(-x_2)\phi_1(-x_1)|0\rangle\end{aligned}$$

弱局所可換性

$$\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_n(x_n)\cdots\phi_2(x_2)\phi_1(x_1)|0\rangle \text{ at the Jost points}$$

を Wightman 関数で再度書き直しておくと・・・

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(-\xi_{n-1},\cdots,-\xi_2,-\xi_1) \text{ at the Jost points}$$

である。さて、Jost points のまわりは解析的なので

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(-\zeta_{n-1},\cdots,-\zeta_2,-\zeta_1)$$

$\Downarrow$ 複素ローレンツ変換: $-\zeta_i = \Lambda_c\zeta_i$

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1}) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_{n-1},\cdots,\zeta_2,\zeta_1)$$

$\Downarrow$ 複素ローレンツ変換: $\zeta_i' = \Lambda_c\zeta_i$ with $(\mathcal{Im}\zeta')^2 > 0$ and $\mathcal{Im}\zeta'^0 < 0$

to the future tube

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_1',\zeta_2',\cdots,\zeta_{n-1}') = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\zeta_{n-1}',\cdots,\zeta_2',\zeta_1') \text{ on the future tube}$$

$\Downarrow$ at the boundary of the future tube

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1) = W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1)$$

従って、CPT 定理

$$W^{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}) = W^{\phi_n\cdots\phi_2\phi_1}(\xi_{n-1},\cdots,\xi_2,\xi_1)$$

が成立する。