第 2 章 標準模型外観

Ⅰ． $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 標準模型の相互作用

標準模型の相互作用は、$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ相互作用が主であり、

- クォーク、レプトン、及び、ゲージボゾンの**質量はゼロ**

である。標準模型の素粒子は

- ３世代のクォーク q ：$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
- ３世代のレプトン ℓ ：$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$
- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群に付随するゲージ粒子：$W_\mu^{(1,2,3)}, B_\mu$
- $SU(3)_c$ 群に付随するゲージ粒子：$G_\mu^{(1,2,\cdots,8)}$
- ヒッグス粒子：ϕ

である。すべての質量がゼロなので、

- ３世代のクォーク・レプトンは、3 つ完全コピーの組

になっていることに注意する。これらの組が区別されるのは

- ３世代のクォーク・レプトンが質量を持つ

ときである。クオークやレプトンは、

- 右巻き（*R*ight-handed）粒子：$\begin{cases} q_R : u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \\ \ell_R : e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^- \end{cases}$
- 左巻き（*L*eft-handed）粒子：$\begin{cases} q_L : \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \\ \ell_L : \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \end{cases}$

の状態の区別がある（**【問題１】**標準模型にニュートリノの右巻き状態（$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$）が無いのは何故か？）。この状態は、ディラックスピノル ψ を用いて、

$$\psi = \psi_L + \psi_R \begin{cases} \psi_L = \dfrac{1-\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi \\ \psi_R = \dfrac{1+\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\psi \end{cases} \Leftarrow \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{2.1}$$

と表わせる（**【問題２】第 1 章**(1.6)を用いて、γ_5 を求めよ）。ここで、ψ_R を反粒子 ψ^C を用いて表わすこともでき、

$$\psi_R = -\left(\overline{\psi_L^C} C\right)^T \Leftarrow \overline{\psi_L^C} = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi^C\right)^\dagger \gamma^0 \tag{2.2}$$

である。(**【問題３】**１）**第 1 章**(1.81)の $C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$ を用いて $C^{-1}\gamma^5 C = \gamma_5^T$ を証明せよ。２）**第 1 章**(1.90)と $\psi_R = \dfrac{1+\gamma_5}{2}\psi$ を用いて、$\psi_R = -\left(\overline{\psi_L^C} C\right)^T$ を求めよ。)。従って、

- 右巻き粒子（ψ_R）の代わりに、左巻きの反粒子（ψ_L^C）

を用いて、クオークやレプトンは、

- 左巻き（*L*eft-handed）**反粒子**：$\begin{cases} q_L^C : u_L^C, d_L^C, c_L^C, s_L^C, t_L^C, b_L^C \\ \ell_L^C : e_L^+, \mu_L^+, \tau_L^+ \end{cases}$

として、導入することもできる（**【問題４】**左巻き（*L*eft-handed）反粒子：u_L^C, d_L^C, e_L^+ の $U(1)_Y$ に付随する超電荷を求めよ。)。

クォークとレプトンのラグランジアン密度では、ゲージ相互作用が基本であり

- **第 1 章**(1.64)の微分 ∂_μ を $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ の共変微分 D_μ

に変更すればよい。従って、

- $q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$ と u_R, d_R, e_R^- で代表

して

$$\mathcal{L}_K = i\overline{q_L}\gamma^\mu D_\mu q_L + i\overline{u_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu u_R + i\overline{d_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu d_R + i\overline{\ell_L}\gamma^\mu D_\mu \ell_L + i\overline{e_R^-}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu e_R^- \tag{2.3}$$

である。ここで、共変微分は、

$$\begin{cases} D_\mu = \partial_\mu + i\dfrac{g_c}{\hbar}\displaystyle\sum_{a=1}^{8}\dfrac{\lambda_a}{2}G_\mu^{(a)} + i\dfrac{g}{\hbar}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\tau_i}{2}W_\mu^{(i)} + i\dfrac{g'}{\hbar}\dfrac{Y_L}{2}B_\mu \\ \tilde{D}_\mu = \partial_\mu + i\dfrac{g_c}{\hbar}\displaystyle\sum_{a=1}^{8}\dfrac{\lambda_a}{2}G_\mu^{(a)} + i\dfrac{g'}{\hbar}\dfrac{Y_R}{2}B_\mu \end{cases} \tag{2.4}$$

で与えられる。しばしば、

$$\begin{cases} G_\mu = \displaystyle\sum_{a=1}^{8}\dfrac{\lambda_a}{2}G_\mu^{(a)} \\ W_\mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\tau_i}{2}W_\mu^{(i)} \end{cases} \tag{2.5}$$

を用いて

$$\begin{cases} D_\mu = \partial_\mu + i\dfrac{g_c}{\hbar}G_\mu + i\dfrac{g}{\hbar}W_\mu + i\dfrac{g'}{\hbar}\dfrac{Y_L}{2}B_\mu \\ \tilde{D}_\mu = \partial_\mu + i\dfrac{g_c}{\hbar}G_\mu + i\dfrac{g'}{\hbar}\dfrac{Y_R}{2}B_\mu \end{cases} \tag{2.6}$$

と与えられる。また、電荷 e は

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{2.7}$$

で定義され（(2.69)参照）、クォークとレプトンの電荷（eQ）は、

$$Q = \begin{cases} \dfrac{\tau_3 + Y_L}{2} \cdots \text{Left-handed} \\ \dfrac{Y_R}{2} \cdots \text{Right-handed} \end{cases} \tag{2.8}$$

で与えられる。

1 行 1 列の右巻き粒子と **2 行 1 列**の左巻き粒子のアンバランスを解消するために

- 1 行 1 列の右巻き粒子を 2 行 1 列の状態に変換：$\psi_R \to \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \psi_R$

を考える。そのために、

- $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$をヒッグス粒子として導入

することになる。つまり、

$$\begin{cases} \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \\ \phi^G = G\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} G = i\tau_2 \\ \phi^- = \left(\phi^+\right)^* \end{cases} \end{cases} \tag{2.9}$$

として導入する。クォークとレプトンの質量項は、$\overline{\psi_L}\psi_R$ のタイプなので、質量項にあたるラグランジアン密度は、行列演算が完結するように、(2.9)を用いて$\begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$タイプとして

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q_L}\phi^G u_R - \frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q_L}\phi d_R - \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{\ell_L}\phi e_R^- \tag{2.10}$$

で与えられる（**【問題５】**「$\phi' = \exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right)\phi$ とするとき $\phi'^G = \exp\left(-i\sum_{i=1}^{3}\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right)\phi^G$ と変換するためには、$\phi^G = G\phi^*$ $\left(G = i\tau_2\right)$ である」を証明せよ）。

ゲージ粒子のラグランジアン密度$\mathcal{L}_{gauge}$は、

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4\mu_0}\sum_{a=1}^{8} G^{(a)\mu\nu}G^{(a)}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\mu_0}\sum_{i=1}^{3} W^{(i)\mu\nu}W^{(i)}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\mu_0}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

で与えられる。更に、

$$\begin{cases} G^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{8}\dfrac{\lambda_a}{2}G^{(a)\mu\nu} \\ W^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3}\dfrac{\tau_i}{2}W^{(i)\mu\nu} \end{cases} \tag{2.12}$$

を用いて

$$\mathcal{L}_{gauge}=-\frac{1}{2\mu_0}Tr\left(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right)-\frac{1}{2\mu_0}Tr\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right)-\frac{1}{2\mu_0}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{2.13}$$

である（**【問題６】**(2.12)を用いて(2.13)を導け）。ここに、

$$V^{\mu\nu}=\partial^\mu V^\nu-\partial^\nu V^\mu+i\frac{g_V}{\hbar}\left[V^\mu,V^\nu\right]\Leftarrow V^\mu=\begin{cases}G^\mu\cdots g_V=g_c\\ W^\mu\cdots g_V=g\end{cases} \tag{2.14}$$

$$B^{\mu\nu}=\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu$$

である。更に

$$i\frac{g_V}{\hbar}V^{\mu\nu}=\left[D^\mu,D^\nu\right]\Leftarrow D^\mu=\partial^\mu+i\frac{g_V}{\hbar}V^\mu \tag{2.15}$$

が成立する（**【問題７】**任意の関数$\Phi(x)$に対して、$i\frac{g_V}{\hbar}V^{\mu\nu}\Phi(x)=\left[D^\mu,D^\nu\right]\Phi(x)$を証明せよ）。また、ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_V=-\frac{1}{2\mu_0}Tr\left(V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}\right) \tag{2.16}$$

は、次のゲージ変換：

$$\begin{cases}\frac{g_V}{\hbar}V'^\mu=U\frac{g_V}{\hbar}V^\mu U^\dagger-iU\partial^\mu U^\dagger=-UiD^\mu U^\dagger\\ D^\mu=\partial^\mu+i\frac{g_V}{\hbar}V^\mu\end{cases} \tag{2.17}$$

により不変である。つまり、

$$Tr\left(V'^{\mu\nu}V'_{\mu\nu}\right)=Tr\left(V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}\right) \tag{2.18}$$

を満たす（**【問題８】** $Tr\left(V'^{\mu\nu}V'_{\mu\nu}\right)=Tr\left(V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}\right)$を証明せよ）。従って、(2.19)は

- $SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ゲージ変換により不変である事

を示している。特に、$SU(2)_L$のゲージ変換Uとすると

$$U=\exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\frac{\boldsymbol{\tau}_i}{2}\boldsymbol{\theta}_i(x)\right) \tag{2.20}$$

と表わせ、この変換の元で、クォークやレプトンをψで代表して

$$\begin{cases}\psi'_L=U\psi_L\\ \phi'=U\phi\end{cases}$$
$$\frac{g}{\hbar}W'^\mu=U\frac{g}{\hbar}W^\mu U^\dagger-iU\partial^\mu U^\dagger \tag{2.21}$$

と変換されるが、この素粒子以外は変換されず

$$\begin{cases}\psi'_R=\psi_R\\ B'^\mu=B^\mu\\ G^{(a)}=G^{(a)}\ \ (a=1,2,\cdots,8)\end{cases} \tag{2.22}$$

である。

Ⅱ.ヒッグス粒子の性質

クォークとレプトンの質量項は、$\overline{\psi_L}\psi_R$ のタイプで与えられる。ヒッグス粒子として

$$\begin{cases}\phi^+ = 0 \\ \phi^0 = \left|\phi^0\right| = 一定\end{cases} \tag{2.23}$$

の解が現れるとき、(2.10)のクォークとレプトンが

$$\mathcal{L}_{mass} = -\left|\phi^0\right|\left(\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{u_L}u_R + \frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{d_L}d_R + \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{e_L^-}e_R^- + \text{h.c.}\right) \tag{2.24}$$

の質量項を得る（**【問題９】**(2.23)のとき、(2.24)を導け)。そして、

- (2.23)の解を自動的に与える機構を**ヒッグス機構**

といい、その結果

- (2.24)のように、質量ゼロのクォーク・レプトンが質量を獲得する事

が分かる（**Ⅲ.質量を持つ素粒子**参照)。ヒッグス粒子のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{higgs}$ は、**第 1 章**(1.53)に共変微分を用いて

$$\mathcal{L}_{higgs} = \left|D_\mu\phi\right|^2 - \left(\frac{m_\phi c}{\hbar}\right)^2\left|\phi\right|^2 - \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\hbar c}\left|\phi\right|^4 \quad (\lambda > 0) \tag{2.25}$$

とする。$V(\phi)$ と表わすポテンシャル項を用いると

$$\mathcal{L}_{higgs} = \left|D_\mu\phi\right|^2 - V(\phi) \tag{2.26}$$

$$V(\phi) = \mu^2\left|\phi\right|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4}\left|\phi\right|^4 \quad \left(\mu = \frac{m_\phi c}{\hbar}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\hbar c}\right) \tag{2.27}$$

になる。この時、

- ヒッグス粒子が「(2.23)の $\phi^0 = \left|\phi^0\right| = 一定$ 」を与えるには、$m_\phi^2 < 0$ が必要

になる。$m_\phi^2 < 0$ の時、

- ヒッグス粒子のエネルギー最低状態（**真空**という）を与える

事を以下の議論で示す。

ヒッグス粒子のエネルギー E_{higgs} とエネルギー密度 $\mathcal{H}_{higgs}$ は

$$\begin{aligned} E_{higgs} &= \int \mathcal{H}_{higgs} d\boldsymbol{x} \\ \mathcal{H}_{higgs} &= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{higgs}}{\partial\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x^0}\right)}\frac{\partial\phi_i}{\partial x^0} + \frac{\partial\phi_i^*}{\partial x^0}\frac{\partial\mathcal{L}_{higgs}}{\partial\left(\frac{\partial\phi_i^*}{\partial x^0}\right)}\right) - \mathcal{L}_{higgs} \Leftarrow \phi_1 = \phi^+,\ \phi_2 = \phi^0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

で定義される。(2.28)から与えられるエネルギーは、3 次元体積：$V=\int d\boldsymbol{x}$ として

$$\frac{E_{higgs}}{V} \geq \left(\frac{m_\phi c}{\hbar}\right)^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\hbar c}|\phi|^4 \tag{2.29}$$

を満たす事が分かる。ここに、等号は

$$\phi = \text{一定（\textbf{真空期待値}という）} \tag{2.30}$$

の時に成り立つ（**【問題１０】**(2.29)と(2.30)を導け）。従って、

$$\frac{E_{higgs}}{V} \geq \mu^2|\phi|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4}|\phi|^4 \geq \begin{cases} 0 & \text{at } |\phi| = 0 \quad \cdots m_\phi^2 > 0 \\ -\dfrac{\mu^4}{\tilde{\lambda}} & \text{at } |\phi| = \sqrt{\dfrac{-2\mu^2}{\tilde{\lambda}}} \cdots m_\phi^2 < 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

を得る（**【問題１１】**(2.31)を導け）。ヒッグス粒子のエネルギー最低状態は

- ヒッグス粒子がゼロでない真空期待値：$\phi = $一定

を持つとき、つまり、

- $m_\phi^2 < 0$ の時、$\dfrac{E_{\min}}{V} = -\dfrac{\mu^4}{\tilde{\lambda}}(<0)$ at $|\phi|^2 = \dfrac{-2\mu^2}{\tilde{\lambda}} \cdots m_\phi^2 < 0$ (2.32)

である。

さて、ヒッグス粒子のエネルギー最低状態が負のエネルギー（$E_{\min} < 0$）を与えるが、負のエネルギーは受け入れられないので、

- あらゆる素粒子のエネルギーを負のエネルギー $\dfrac{E_{\min}}{V} = -\dfrac{\mu^4}{\tilde{\lambda}}$ から測る事

にする。そのために、

- 負のエネルギー $\dfrac{E_{\min}}{V} = \dfrac{-\mu^2}{\tilde{\lambda}}$ から測ったヒッグス粒子

を考える必要がある。その時、

$$|\phi|^2 = |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2 = \frac{-2\mu^2}{\tilde{\lambda}} \tag{2.33}$$

より得られる解として

$$\begin{cases} |\phi^+| = 0 \\ |\phi^0| = \sqrt{\dfrac{-2\mu^2}{\tilde{\lambda}}} \end{cases} \tag{2.34}$$

の解を用いる。「負のエネルギー $\dfrac{E_{\min}}{V} = \dfrac{-\mu^2}{\lambda}$ から測ったヒッグス“量子”：η^0」は、

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \Leftarrow \upsilon = 2\sqrt{\frac{-m_\phi^2}{\lambda}} \tag{2.35}$$

で定義される（$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の理由は後ほど明らかになる：(2.60)参照）。つまり、

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \phi^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) + ih_3 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

で与えられる。ここに、ヒッグスの**真空期待値**（$\langle 0|\phi^0|0\rangle$ で表わす）は

$$\langle 0|\phi^0|0\rangle = \sqrt{\frac{c^3}{2\hbar}}\upsilon \ \ (\upsilon\text{acuum} = \text{真空}) \tag{2.37}$$

で定義される。

さて、(2.36)を「複素数の極座標表示」に対応する方法で書き換えて見る。複素数（z）の極座標表示は、

$$z = |z| e^{i\theta} \tag{2.38}$$

である。複素数は複素 1 行 1 列であるが、複素 2 行 1 列の場合（h）も同様に

$$\overbrace{\phi}^{2行1列} = \overbrace{e^{i\theta}}^{2行2列} \overbrace{|\phi|}^{2行1列} \tag{2.39}$$

と表わせる。ここに、ϕ が複素 2 行 1 列なので、

- $e^{i\theta}$ は、行列演算のルールに従って、2 行 2 列になる：$\overbrace{e^{i\theta}}^{2行2列}$

必要がある。通常、$\overbrace{e^{i\theta}}^{2行2列}$ は 2 行 2 列の $\tau_{1,2,3}$ を用いて（θ のかわりに ξ とする）

$$\overbrace{e^{i\theta}}^{2行2列} = \exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\frac{\tau_i}{2}\xi_i\right) \tag{2.40}$$

と表わせる。もちろん、

- $\xi_i \ (i = 1,2,3)$ は素粒子

を表わす。2 行 2 列の $\overbrace{|\phi|}^{2行1列}$ は、実数であるので、(2.36)にある実数 $\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0$ を用いて

$$\overbrace{|\phi|}^{2行1列} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

とする。以上から、

$$\overbrace{\phi}^{2行1列} = \exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\frac{\tau_i}{2}\xi_i\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

を得る。

Ⅲ.質量を持つ素粒子

標準模型の相互作用は、$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変なラグランジアン密度で与えられ、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{higgs} + \mathcal{L}_{mass}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= i\overline{q_L}\gamma^\mu D_\mu q_L + i\overline{u_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu u_R + i\overline{d_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu d_R + i\overline{\ell_L}\gamma^\mu D_\mu \ell_L + i\overline{e_R^-}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu e_R^- \\ \mathcal{L}_{mass} &= -\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q_L}\phi^G u_R - \frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q_L}\phi d_R - \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{\ell_L}\phi e_R^- \end{aligned}\right\} \Leftarrow 3\text{世代に拡張} \\ \mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2\mu_0}Tr\left(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2\mu_0}Tr\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4\mu_0}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{higgs} = \left|D_\mu\phi\right|^2 - V(\phi) \Leftarrow V(\phi) = \mu^2|\phi|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4}|\phi|^4 \quad \left(\mu = \frac{m_\phi c}{\hbar}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\hbar c}\right) \end{cases} \tag{2.43}$$

で与えられる。(2.42)を満たす $SU(2)_L$ ゲージ変換（(2.20)の U で表わす）されると、(2.22)に従って変換され

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_K + \mathcal{L}'_{gauge} + \mathcal{L}'_{higgs} + \mathcal{L}'_{mass}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_K &= i\overline{q'_L}\gamma^\mu D'_\mu q'_L + i\overline{u_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu u_R + i\overline{d_R}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu d_R + i\overline{\ell'_L}\gamma^\mu D'_\mu \ell'_L + i\overline{e_R^-}\gamma^\mu \tilde{D}_\mu e_R^- \\ \mathcal{L}'_{mass} &= -\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\phi'^G u_R - \frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\phi' d_R - \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{\ell'_L}\phi' e_R^- \end{aligned}\right\} \Leftarrow 3\text{世代に拡張} \\ \mathcal{L}'_{gauge} = -\frac{1}{2\mu_0}Tr\left(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2\mu_0}Tr\left(W'^{\mu\nu}W'_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4\mu_0}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}'_{higgs} = \left|D_\mu\phi'\right|^2 - V(\phi') \Leftarrow V(\phi') = \mu^2|\phi'|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4}|\phi'|^4 \quad \left(\mu = \frac{m_\phi c}{\hbar}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\hbar c}\right) \end{cases} \tag{2.44}$$

に変更される。ところが、$SU(2)_L$ ゲージ変換不変性により

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \tag{2.45}$$

が保証される。つまり、

- $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ どちらを採用しても同じ素粒子現象を記述できる

事になる。

ヒッグス粒子は、(2.21)の $\phi' = U\phi$ で変換され、(2.42)を用いると

$$\phi' = U\exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\frac{\tau_i}{2}\xi_i\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}v + \eta^0\right) \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

である。どんな U を持つゲージ変換でもじ素粒子現象を記述できるので、好きな U を用いて良い。そこで、計算が楽になるように

$$U\exp\left(i\sum_{i=1}^{3}\frac{\tau_i}{2}\xi_i\right) = I \tag{2.47}$$

とする（これを**ユニタリーゲージ**という）。つまり、U の表式(2.20)から、「好きなU」として

$$\theta_i(x) = -\xi_i(x) \quad (i=1,2,3) \tag{2.48}$$

と選ぶことになる。その結果、ϕ' は

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix},\ \phi'^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

と簡単化される。また、

$$\phi^G = G\phi^* \quad (G = i\tau_2) \tag{2.50}$$

を用いて（**【問題１２】** $\phi' = U\phi$ を用いて、(2.50)の ϕ^G は $\phi'^G = U\phi^G$ を満たす事を証明せよ。その際に、(2.20)の U の表式を利用する。）、(2.44)の $\mathcal{L}'_{mass}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{mass} &= -\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\phi'^G u_R - \frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\phi' d_R - \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{\ell'_L}\phi' e_R^- = -\frac{f_u}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \\ 0 \end{pmatrix} u_R \\ &\quad -\frac{f_d}{\sqrt{\hbar c}}\overline{q'_L}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} d_R - \frac{f_e}{\sqrt{\hbar c}}\overline{\ell'_L}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} e_R^- \Leftarrow \text{3世代に拡張}\end{aligned} \tag{2.51}$$

と表わせる。従って、クォークやレプトンの質量として、

$$\begin{cases} m_u = \frac{1}{\sqrt{2}} f_u \upsilon \\ m_d = \frac{1}{\sqrt{2}} f_d \upsilon \Leftarrow \text{3世代に拡張} \\ m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} f_e \upsilon \end{cases} \tag{2.52}$$

を得る（**【問題１３】**(2.52)を導け）。

$W^{(i)\mu}$ $(i=1,2,3)$ や B^μ の質量項は

$$\mathcal{L}'_{higgs} = \left|D_\mu \phi'\right|^2 - \left(\frac{m_\phi c}{\hbar}\right)^2 \left|\phi'\right|^2 - \frac{\lambda}{4}\left|\phi'\right|^4 \Leftarrow \phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

の $\left|D_\mu \phi'\right|^2$ の項から現れる事が分かる。つまり、(2.6)より

$$\left|D_\mu \phi'\right|^2 = \left(D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix}\right)^{\dagger} D^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon + \eta^0\right) \end{pmatrix} \Leftarrow D^\mu = \partial_\mu + i\frac{g_c}{\hbar}G_\mu + i\frac{g}{\hbar}W_\mu + i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B_\mu \tag{2.54}$$

であるが、$W^{(i)\mu}$ $(i=1,2,3)$ や B^μ の質量に関連する項目は、

$$\left|D_\mu\phi'\right|^2=\left(\left(i\frac{g}{\hbar}W_\mu+i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B_\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon\end{pmatrix}\right)^\dagger\left(i\frac{g}{\hbar}W^\mu+i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B^\mu\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon\end{pmatrix}+\cdots \tag{2.55}$$

になる。更に、

$$i\frac{g}{\hbar}W^\mu+i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B^\mu=\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}gW^{(3)\mu}+g'B^\mu & g\left(W^{(1)\mu}+iW^{(2)\mu}\right)\\ g\left(W^{(1)\mu}+iW^{(2)\mu}\right) & -gW^{(3)\mu}+g'B^\mu\end{pmatrix}$$

$$=\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{g^2+g'^2}\dfrac{gW^{(3)\mu}+g'B^\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} & \sqrt{2}g\dfrac{W^{(1)\mu}-iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}g\dfrac{W^{(1)\mu}+iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{g^2+g'^2}\dfrac{gW^{(3)\mu}-g'B^\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\end{pmatrix} \tag{2.56}$$

を用いて(2.55)を計算する。$W^\pm,Z$ の質量 $m_{W,Z}$ を用いると、**第 1 章**(1.70)のラグランジアン密度から

$$\left|D_\mu\phi'\right|^2=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{m_Wc}{\hbar}\right)^2\left(\left|W^{+\mu}\right|^2+\left|W^{-\mu}\right|^2\right)+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{m_Zc}{\hbar}\right)^2Z^\mu Z_\mu+\cdots\left\{\begin{aligned}W^{\pm\mu}&=\frac{W^{(1)\mu}\mp iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}\\ Z^\mu&=\cos\theta_W W^{(3)\mu}-\sin\theta_W B^\mu\end{aligned}\right. \tag{2.57}$$

と表わす。従って、(2.55)の計算結果と比較して質量 $m_{W,Z}$ と混合角 θ_W は、

$$\left\{\begin{aligned}m_W&=\sqrt{\frac{\mu_0cg^2}{\hbar}}\frac{\upsilon}{2}\\ m_Z&=\sqrt{\frac{\mu_0cg_Z^2}{\hbar}}\frac{\upsilon}{2}\end{aligned}\right.\left(g_Z=\sqrt{g^2+g'^2}\right),\ \left\{\begin{aligned}\cos\theta_W&=\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\\ \sin\theta_W&=\frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\end{aligned}\right. \tag{2.58}$$

である（**【問題１４】**(2.58)を導け)。ここに、$\sqrt{\frac{\mu_0cg^2}{\hbar}}$ と $\sqrt{\frac{\mu_0cg_Z^2}{\hbar}}$ は無次元量である。(**【問題１５】** $\mathcal{L}=-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ $\left(F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x)\right)$ に於て A^μ の次元 $\left[A_\mu\right]$ は $\frac{\int\mathcal{L}d^4x}{\hbar c}$ が無次元になるように決められる。また、$D_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}+i\frac{q}{\hbar}A_\mu$ から、$\frac{q}{\hbar}A_\mu$ の次元：$\left[\frac{q}{\hbar}A_\mu\right]$ は、長さ（L）の逆数の次元である。これらの事から、$\sqrt{\frac{\mu_0cq^2}{\hbar}}$ が無次元である事を証明せよ)。同様にすれば、η^0 の項も取り込め

$$\tilde{\upsilon}=\sqrt{\frac{c^3}{\hbar}}\upsilon \tag{2.59}$$

として

$$\left|D_\mu\phi'\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\eta^0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tilde{v}+\eta^0\right)^2\left[\left(\frac{g}{2\hbar}\right)^2\left(\left|W^{+\mu}\right|^2+\left|W^{-\mu}\right|^2\right)+\left(\frac{g_Z}{2\hbar}\right)^2 Z^\mu Z_\mu\right]$$
$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(-2\mu^2\right)\left(\eta^0\right)^2 + \frac{\tilde{\lambda}\tilde{v}}{4}\left(\eta^0\right)^3 + \frac{\tilde{\lambda}}{16}\left(\eta^0\right)^4 \tag{2.60}$$

を得る（**【問題１６】**(2.60)を導け）（**【問題１７】**(2.35)の「$\frac{1}{\sqrt{2}}$ の理由は後ほど明らかになる」の理由を説明せよ）。従って、

- 負のエネルギー $\frac{E_{\min}}{V} = \frac{-\mu^2}{\tilde{\lambda}}$ から測ったヒッグス粒子 η^0 の質量（m_{η^0}）は正になる：

  $m_{\eta^0} = \sqrt{-2\mu^2}\ \left(-2\mu^2 > 0\right)$

である事が分かる。

V.クォーク・レプトンの電弱相互作用

質量ゼロのクォーク・レプトンと $W^{(i)\mu}\ (i=1,2,3), B^\mu$ の相互作用：$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ相互作用から出発して、質量を持ったクォーク・レプトンの相互作用を導く。その際、

- 電荷 e は、質量ゼロの光子との相互作用の強さ

として定義され、(2.7)を与えることになる。クォーク・レプトンの $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ相互作用は、(2.3)で与えられ、$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ相互作用は、

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = i\overline{q_L}\gamma^\mu\left(i\frac{g}{\hbar}W_\mu + i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B_\mu\right)q_L + i\overline{\ell_L}\gamma^\mu\left(i\frac{g}{\hbar}W_\mu + i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B_\mu\right)\ell_L$$
$$+ i\overline{u_R}\gamma^\mu\left(i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)u_R + i\overline{d_R}\gamma^\mu\left(i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)d_R + i\overline{e_R^-}\gamma^\mu\left(i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)e_R^- \tag{2.61}$$

で表わせる。(2.61)より、クォークの部分を取り出して

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = i\overline{q_L}\gamma^\mu\left(i\frac{g}{\hbar}W_\mu + i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B_\mu\right)q_L + i\overline{u_R}\gamma^\mu\left(i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)u_R + i\overline{d_R}\gamma^\mu\left(i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_R}{2}B_\mu\right)d_R \tag{2.62}$$

を用いる。

質量ゼロの $W^{(i)\mu}\ (i=1,2,3), B^\mu$ は、質量を持つ素粒子(2.57)：

$$W^{\pm\mu} = \frac{W^{(1)\mu} \mp iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \tag{2.63}$$

$$Z^\mu = \cos\theta_W W^{(3)\mu} - \sin\theta_W B^\mu \tag{2.64}$$

になる。ここで、$\theta_W = 0$ で B^μ になる状態があるはずで、(2.64)より

$$A^\mu = \sin\theta_W W^{(3)\mu} + \cos\theta_W B^\mu \tag{2.65}$$

とわかる。この状態は、(2.60)に現れず

- 質量を持たないので光子 A^μ と同定

できる。(2.56)より

$$
\begin{aligned}
i\frac{g}{\hbar}W^\mu + i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B^\mu &= i\frac{g}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W^{+\mu} \\ W^{-\mu} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + i\frac{g_Z}{\hbar}\left[\left(\frac{\tau_3}{2}\cos^2\theta_W - \frac{Y_L}{2}\sin^2\theta_W\right)Z^\mu + \cos\theta_W\sin\theta_W\left(\frac{\tau_3}{2}+\frac{Y_L}{2}\right)A^\mu\right]
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

$$
i\frac{g'}{\hbar}\frac{Y_L}{2}B^\mu = i\frac{g_Z}{\hbar}\left(-\frac{Y_L}{2}\sin^2\theta_W Z^\mu + \frac{Y_L}{2}\sin\theta_W\cos\theta_W A^\mu\right) \tag{2.67}
$$

を得る（**【問題１８】**(2.66)を導け)。(2.62)に代入し、**クォーク・レプトンの電弱相互作用**として

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{u_L}\gamma^\mu i\frac{g}{\hbar}W^{+\mu}d_L + \overline{d_L}\gamma^\mu i\frac{g}{\hbar}W^{-\mu}u_L\right) + i\overline{q_L}\gamma^\mu i\frac{g_Z}{\hbar}\left(\frac{\tau_3}{2} - Q\sin^2\theta_W\right)Z^\mu q_L + i\overline{q_L}\gamma^\mu i\frac{e}{\hbar}QA^\mu q_L \\
&\quad + i\left(\overline{u_R}\gamma^\mu i\frac{g_Z}{\hbar}\left(-Q\sin^2\theta_W Z^\mu\right)u_R + \overline{u_R}\gamma^\mu i\frac{e}{\hbar}QA^\mu u_R + (u\to d)\right)
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

を得る。ここに、光子 A^μ には電荷 eQ が付随し

$$
e = g_Z\sin\theta_W\cos\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{2.69}
$$

$$
Q = \begin{cases} \dfrac{\tau_3}{2} + \dfrac{Y_L}{2} \cdots \text{Left-handed} \\ \dfrac{Y_R}{2} \qquad\quad \cdots \text{Right-handed} \end{cases} = Q_{em}\begin{cases} \dfrac{2}{3}\cdots u_{L,R} \\ -\dfrac{1}{3}\cdots d_{L,R} \end{cases} \tag{2.70}
$$

が導かれる（**【問題１９】**(2.68)を導き(2.69)と(2.70)を証明せよ)。更に、光子 A^μ の部分は、

$$
\mathcal{L}_{\text{光子}} = i\left(\bar{u}\gamma^\mu i\frac{e}{\hbar}Q_{em}A^\mu u + \bar{d}\gamma^\mu i\frac{e}{\hbar}Q_{em}A^\mu d_L\right) \tag{2.71}
$$

となり、光子場の電磁相互作用を正しく与える。(2.68)を一般化すれば、

$$
\begin{aligned}
&\psi_L = \begin{pmatrix}\psi_{1L}\\ \psi_{2L}\end{pmatrix},\ \psi_R = \begin{pmatrix}\psi_{1R}\\ \psi_{2R}\end{pmatrix} \\
&\psi = \psi_L + \psi_R
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

として、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{\psi_{1L}}\gamma^\mu i\frac{g}{\hbar}W^{+\mu}\psi_{2L} + \overline{\psi_{2L}}\gamma^\mu i\frac{g}{\hbar}W^{-\mu}\psi_{1L}\right) \\
&\quad + i\left[\overline{\psi_L}\gamma^\mu i\frac{g_Z}{\hbar}\left(\frac{\tau_3}{2} - Q_{em}\sin^2\theta_W\right)\psi_L + i\overline{\psi_R}\gamma^\mu i\frac{g_Z}{\hbar}\left(-Q_{em}\sin^2\theta_W\right)\psi_R\right]Z^\mu \\
&\quad + i\overline{\psi}\gamma^\mu i\frac{e}{\hbar}Q_{em}A^\mu\psi
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

を得る（**【問題２０】**(2.73)を導け)。