

第4章：SU(5)統一理論とレプトクォーク

A. レプトクォークのSU(5)表現

ここでは、3つのタイプのレプトクォークが $SU(5)^{loc}$ 統一理論のもとでどのように組み込み可能かを探る。3つのタイプの相互作用は

$$(\overline{q}_L S_1 e_R, \overline{\ell}_L S_2 u_R, \overline{\ell}_L S_3 d_R)$$

であった。この相互作用が $SU(5)^{loc}$ 統一理論に含まれるためには、対応する相互作用項がこの相互作用が $SU(5)^{loc}$ 変換で不変でなければならない。クォーク・レプトンの変換性がわかっているので、逆にレプトクォークの表現がわかる。表4-4により、

$$q_L \Rightarrow \mathbf{10}_L, e_R^- \Rightarrow \mathbf{10}_R^*, \ell_L \Rightarrow \mathbf{5}_L^*, u_R \Rightarrow \mathbf{10}_R^*, d_R \Rightarrow \mathbf{5}_R$$

が対応しているので、

$$\overline{q}_L S_1 e_R \Rightarrow \overline{\mathbf{10}}_L \mathbf{s}_1 \mathbf{10}_R^*, \overline{\ell}_L S_2 u_R \Rightarrow \overline{\mathbf{5}}_L \mathbf{s}_2 \mathbf{10}_R^*, \overline{\ell}_L S_3 d_R \Rightarrow \overline{\mathbf{5}}_L \mathbf{s}_3 \mathbf{5}_R$$

ここで、対応する $SU(5)^{loc}$ レプトクォークの表示を $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ とした。この相互作用が $SU(5)^{loc}$ 変換で不変になるには、相互作用全体で $SU(5)^{loc}$ 電荷を持っていないければよい。つまり、 $SU(5)^{loc}$ 一重項になっていければよい。ここでヤング図を用いて可能なレプトクォークの表現を決める。関与するヤング図は

$$5 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad 10 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad 5^* = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad 10^* = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

である。表現の次数の求め方は Appendix2 を参照するように。

$$1) \overline{q}_L S_1 e_R \Rightarrow \overline{\mathbf{10}}_L \mathbf{s}_1 \mathbf{10}_R^* \Rightarrow \mathbf{10}^* \mathbf{s}_1 \mathbf{10}^* \Rightarrow \mathbf{s}_1 = \mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$$

\mathbf{s}_1 の変換性は $\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$ なので、ヤング図の掛け算の法則により

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \oplus \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \oplus \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{50} \end{aligned}$$

$$2) \overline{\ell}_L S_2 u_R \Rightarrow \overline{\mathbf{5}}_L \mathbf{s}_2 \mathbf{10}_R^* \Rightarrow \mathbf{5} \mathbf{s}_2 \mathbf{10}^* \Rightarrow \mathbf{s}_2 = \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10}$$

\mathbf{s}_2 の変換性は $\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10}$ なので、ヤング図の掛け算の法則により、

$$\begin{aligned}
 5^* \otimes 10 &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 &= 5 \oplus \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 5 \oplus 45^*
 \end{aligned}$$

$$3) \overline{\ell}_L S_3 d_R \Rightarrow \overline{5}_L^* S_3 5_R \Rightarrow 5 S_3 5 \Rightarrow S_3 = 5^* \otimes 5^*$$

S_3 の変換性は $5^* \otimes 5^* = (5 \otimes 5)^*$ なので、ヤング図の掛け算の法則により、

$$5 \otimes 5 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \oplus \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 1} \\
 &= 10 \oplus 15
 \end{aligned}$$

レプトクォーク	変換性	表現		
S_1	$10 \otimes 10$	5^*	45	50
S_2	$5^* \otimes 10$	5	45^*	
S_3	$5^* \otimes 5^*$	10^*	15^*	

図4-5: レプトクォークの $SU(5)^{loc}$ 表現

以上から、3つのタイプのレプトクォークの変換性が求まった。それを表4-5にまとめる。

B. 結合定数のエネルギー依存性

ここで、 $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ 相互作用の統一へのレプトクォークの影響をしらべよう。相互作用の統一は、3つの結合定数が1つの同じ値の結合定数に一致してくるとき可能となる。ここでは、 $SU(5)^{loc}$ の結合定数をに対応する。相互作用の統一が期待できるのは、系に与えるエネルギーが増加すると結合定数の大きさが変わるという事実に基づいている。これを繰り込み群という。繰り込み理論によると、参照される値（繰り込み点）が設定され、それを基準にしてすべての物理量が測られる。繰り込み点はどこに設定してもよい。ところが、観測される物理量は繰り込み点によるはずがない。この要請に基づき定式化すると「繰り込み群方程式」を得る。この処方によると、系のエネルギー Q を $Q = Q_0$ から変化させるとすると、

$$\frac{1}{\alpha_R(Q)} = \frac{1}{\alpha_R(Q_0)} - 8\pi\beta_0 \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right)$$

と求まり、任意のエネルギーでの結合定数の値を予測することができる。ここで、

$$\beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} T(Gauge) - \frac{2}{3} T(Femion) - \frac{1}{3} T(Scalar) \right)$$

である。詳しくは、Appendixを参照されたい。

C. SU(5)の予言とレプトクォークの影響

レプトクォークの影響をしらべるるのであるが、簡単のため以下の仮定をする：

1) レプトクォークの変換性で一番小さい次数の表現である。つまり、

$$(S_1, S_2, S_3) \Rightarrow (\mathbf{5}^*, \mathbf{5}, \mathbf{10}^*)$$

2) (S_1, S_2, S_3) 以外は、十分に重く、統一の質量スケールをもつ。

$SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の結合定数 (g_c, g, g') はエネルギースケール約 100 GeV ($Q = Q_0 = m_Z$) で測られており、

$$\alpha_c = \frac{g_c^2}{4\pi} = 0.119 \pm 0.004 \quad \alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{128.90 \pm 0.09}, \quad \sin^2 \theta_{eff} = 0.23152 \pm 0.00032,$$

である。大雑把に $g = e/\sin \theta_{eff}$ 及び $g' = e/\cos \theta_{eff}$ により $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の結合定数が求められる。この値を元に、3つの結合定数が一点で交わるときの $SU(5)^{loc}$ の結合定数とそのエネルギーを求める。結合定数とそのエネルギーがわかると、エネルギー依存性が決定される。ところで、結合定数とそのエネルギーは2つのインプットから求めることができる。仮に、 (α_c, α_{em}) を用いると、残りの $\sin^2 \theta_{eff}$ を計算することができる。これを実験値と比較して $\sin^2 \theta_{eff} = 0.23152 \pm 0.00032$ を予言すれば、 $SU(5)^{loc}$ の統一理論は現実の物理を反映できることになる。以下でその計算を実行する。スカラーレプトクォークの数を表4-6のように (n_1, n_2, n_3) とする。

1) $SU(3)_c^{loc}$ 結合定数 $\alpha_c = g_c^2/4\pi$: $g_c \rightarrow g_G$ at a unification point

- ゲージ場の寄与は、 $T(Gauge) = 3$ 。
- クォークは基本表現にあり、1つのクォークに対して $T(Fermion) = 1/2 \Rightarrow$ 右・左巻きあるので2倍 $\Rightarrow (u, d)$ あるので2倍 \Rightarrow 世代の数を $N_g (= 3)$ として N_g 倍。
以上、クォーク全部からは $T(Fermion) = (1/2) \times 2 \times 2 \times N_g = 2N_g$ 。
- レプトクォークは基本表現にあり、 $T(Scalar) = 1/2 \Rightarrow SU(2)_L^{loc}$ 2重項なので2倍 $\Rightarrow (n_1, n_2, n_3)$ 組。以上から、レプトクォーク全部からは $T(Scalar) = (1/2) \times 2 \times (n_1 + n_2 + n_3) = n_1 + n_2 + n_3$ 。

公式、 $8\pi\beta_0 = -(11T(Gauge) - 2T(Femion) - T(Scalar))/6\pi$ 、に代入すれば、

	S_1	S_2	S_3
$\subset SU(5)^{loc}$	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{10}^*$
$(SU(3)_c^{loc}, SU(2)_L^{loc})_Y$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{7/6}$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{-7/6}$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{-1/6}$
個数	n_1	n_2	n_3

表4-6：レプトクォークの量子数と個数

$$8\pi\beta_0 = -\frac{1}{6\pi}(33 - 4N_g - (n_1 + n_2 + n_3))$$

まとめて、統一されるエネルギースケールを M_G とすると、

$$\frac{1}{\alpha_c(Q)} = \frac{1}{\alpha_c(M_G)} + \frac{33 - 4N_g - (n_1 + n_2 + n_3)}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

を得る。統一が実現すると $\alpha_G = (g_G^2/4\pi) = \alpha_c(M_G)$ 。

2) $SU(2)_L^{loc}$ 結合定数 $\alpha_L = g^2/4\pi$: $g \rightarrow g_G$ at a unification point

- ゲージ場の寄与は、 $T(Gauge) = 2$ 。
- クォークとレプトンは基本表現にあり、 $T(Fermion) = 1/2 \Rightarrow$ 左巻きのみで1倍
 $\Rightarrow SU(3)_c^{loc}$ カラーのクォークから3倍、レプトンから1倍 \Rightarrow 世代の数を
 $N_g (=3)$ として N_g 倍。以上、クォークとレプトン全部からは
 $T(Fermion) = (1/2) \times (3+1) \times N_g = 2N_g$ 。
- ヒッグススカラーは基本表現にあり、 $T(Scalar) = 1/2 \Rightarrow N_\phi$ 組あるとして N_ϕ 倍。
 以上、 $T(Scalar) = (1/2) \times N_\phi = N_\phi/2$ 。
- レプトクォークは基本表現にあり、 $T(Scalar) = 1/2 \Rightarrow SU(3)_c^{loc}$ 3重項なので3
 倍 $\Rightarrow (n_1, n_2, n_3)$ 組。。以上から、レプトクォーク全部からは $T(Scalar) =$
 $(1/2) \times 3 \times (n_1 + n_2 + n_3) = 3(n_1 + n_2 + n_3)/2$ 。

公式、 $8\pi\beta_0 = -(11T(Gauge) - 2T(Femion) - T(Scalar))/6\pi$ 、に代入すれば、

$$8\pi\beta_0 = -\frac{1}{6\pi}\left(22 - 4N_g - \frac{3}{2}(n_1 + n_2 + n_3) - \frac{n_\phi}{2}\right)$$

まとめて、

$$\frac{1}{\alpha_L(Q)} = \frac{1}{\alpha_L(M_G)} + \frac{22 - 4N_g - \frac{3}{2}(n_1 + n_2 + n_3) - \frac{n_\phi}{2}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

を得る。統一が実現すると $\alpha_G = \alpha_L(M_G)$ 。

3) $U(1)_Y^{loc}$ 結合定数 $\alpha_Y = g'^2/4\pi$

この $U(1)_Y^{loc}$ も $SU(5)^{loc}$ に統一されるので、 $\mathbf{5}_L^* = (d_r^C, d_g^C, d_b^C, \nu_e, e^-)_L$ に対してどのよ
うな5行5列の行列になるか？

$$Y = 2/3 \text{ for } d^C; = -1 \text{ for } (\nu_e, e^-)$$

に注意すると、

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで、 $Q_{em} = T^{(3)} + (Y/2)$ である。さて、任意の $SU(N)^{loc}$ 群の生成子は

$$Tr(T^{(a)}) = 0, \quad Tr(T^{(a)}T^{(b)}) \propto \delta^{ab}$$

である。基本表現に対しては、 $Tr(T^{(a)}T^{(b)}) = \delta^{ab}/2$ なので、 Y の行列表示は $Tr(Y) = 0$ を満たしているので、 c を定数として $T^Y = c(Y/2)$ 。これを、 $Tr(T^Y T^Y) = 1/2$ を満たすようにすると、 $Tr(YY)$ を $SU(3)_c^{loc}$ の3色や $SU(2)_L^{loc}$ の上下も考慮して全部加えて、

$$Tr(YY) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 + (-1)^2 \times 2 = \frac{10}{3}$$

より $Tr(T^Y T^Y) = (c^2/4)(10/3) = 1/2 \Rightarrow c = \sqrt{3/5}$ を得るので、規格化された Y として

$$T^Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y}{2}$$

を得る。 $\mathbf{10}_L = (u^c, (u, d), e^+)_L$ に対しては、公式によると、 $Tr(T^Y T^Y) = (N-2)/2 = 3/2$

であり、

$$Y = 1/3 \text{ for } (u, d); \quad = -4/3 \text{ for } u^c; \quad = 2 \text{ for } e^+$$

から実際に計算すると

$$Tr(YY) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 \times 2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 3 + (2)^2 = \frac{30}{3}$$

なので、 $Tr(T^Y T^Y) = (\sqrt{3/5})^2 (1/2)^2 (30/3) = (3/20)(30/3) = 3/2$ となり、公式と一致する。

ゲージ定数は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \dots + \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \left(g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) f_L + \bar{f}_R \gamma_\mu \left(g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) f_R + \dots \\ &= \dots + \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \left(g' \sqrt{\frac{5}{3}} T^Y B_\mu \right) f_L + \bar{f}_R \gamma_\mu \left(g' \sqrt{\frac{5}{3}} T^Y B_\mu \right) f_R + \dots \\ &= \dots + \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \left(g_G T^Y B_\mu \right) f_L + \bar{f}_R \gamma_\mu \left(g_G T^Y B_\mu \right) f_R + \dots \end{aligned}$$

ここで $g_G = g' \sqrt{5/3}$ は $SU(5)^{loc}$ のゲージ定数である。これを g_1 とすると、

$$g' = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \Rightarrow g_1 \rightarrow g_G \text{ at a unification point}$$

$$\alpha' = \frac{3}{5} \alpha_1$$

を得る。ベータ関数へは、 Y 電荷でなく T^Y 電荷で計算することになる。

$$Tr(T^{(a)}T^{(b)}) = \delta^{ab} T(Fermion)$$

から、

- クォークとレプトンは 15 種類あり、 $T(Fermion) = 1/2$ for $\mathbf{5}^*$; $= 3/2$ for $\mathbf{10}$

\Rightarrow 左巻きのみで 1 倍 \Rightarrow 世代の数 N_g 倍。以上、クォークとレプトン全部からは

$$T(Fermion) = (1/2) \times N_g + (3/2) \times N_g = 2N_g。$$

- ヒッグススカラーは $Y = 1/2$ は $Tr(YY) = (1/2)^2 \times 2 = 1/2 \Rightarrow Tr(T^Y T^Y) =$

$$(3/5) \times (1/2) = 3/10 \Rightarrow N_\phi \text{ 組あるとして } N_\phi \text{ 倍。以上、 } T(Scalar) = 3N_\phi/10。$$

- レプトクォークは表 4-6 のように $Y = (7/6, -7/6, 1/6)$ であるので、

$$Tr(YY) = \left(\left(\frac{7}{3} \right)^2 \times 3 \times 2, \left(-\frac{7}{3} \right)^2 \times 3 \times 2, \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times 3 \times 2 \right) = \left(\frac{49}{3}, \frac{49}{3}, \frac{1}{3} \right) \times 2$$

$$\Rightarrow Tr(T^Y T^Y) = \left(\sqrt{3/5} \cdot 1/2 \right)^2 \times (49/3, 49/3, 1/3) \times 2 = \left(\frac{49}{10}, \frac{49}{10}, \frac{1}{10} \right) \Rightarrow (n_1, n_2, n_3) \text{ 組。}$$

$$\text{以上、 } T(Scalar) = (49n_1 + 49n_2 + n_3)/10。$$

公式、 $8\pi\beta_0 = -(11T(Gauge) - 2T(Femion) - T(Scalar))/6\pi$ 、に代入すれば、

$$8\pi\beta_0 = -\frac{1}{6\pi} \left(-4N_g - \frac{1}{10}(49n_1 + 49n_2 + n_3) - \frac{3n_\phi}{10} \right)$$

まとめて、

$$\frac{1}{\alpha_1(Q)} = \frac{1}{\alpha_1(M_G)} - \frac{4N_g + \frac{1}{10}(49n_1 + 49n_2 + n_3) + \frac{3n_\phi}{10}}{6\pi} \ln \left(\frac{Q}{M_G} \right)$$

を得る。

以上から、

$$\frac{1}{\alpha_c(Q)} = \frac{1}{\alpha_c(M_G)} + \frac{33 - 4N_g - (n_1 + n_2 + n_3)}{6\pi} \ln \left(\frac{Q}{M_G} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha_L(Q)} = \frac{1}{\alpha_L(M_G)} + \frac{22 - 4N_g - \frac{3}{2}(n_1 + n_2 + n_3) - \frac{n_\phi}{2}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_1(Q)} = \frac{1}{\alpha_1(M_G)} - \frac{4N_g + \frac{1}{10}(49n_1 + 49n_2 + n_3) + \frac{3n_\phi}{10}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

レプトクォークの質量スケールを M_{LQ} とする。 $Q \leq M_{LQ}$ ではレプトクォークは関与しないとするので、

$$\frac{1}{\alpha_c(Q)} = \frac{1}{\alpha_c(M_G)} + \frac{33 - 4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{n_1 + n_2 + n_3}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_L(Q)} = \frac{1}{\alpha_L(M_G)} + \frac{22 - 4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{\frac{3}{2}(n_1 + n_2 + n_3) + \frac{n_\phi}{2}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_1(Q)} = \frac{1}{\alpha_1(M_G)} - \frac{4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{\frac{1}{10}(49n_1 + 49n_2 + n_3) + \frac{3n_\phi}{10}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

と変更すればよい。

このエネルギー依存性を使用して、レプトクォークを含めた統一理論からの予測をしらべる。ここで、実験値は $Q = m_z = 91.1867 \pm 0.0020$ GeV での値になっているので、

$$Q = m_z < M_{\phi, LQ} < M_G$$

である。用いるデータは先に述べたように

$$\alpha_c = \frac{g_c^2}{4\pi} = 0.119 \pm 0.004, \quad \alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{128.90 \pm 0.09}$$

である。 $e = g \sin \theta = gg' / \sqrt{g^2 + g'^2} \Rightarrow e^{-2} = g^{-2} + g'^{-2}$ $\alpha' = 3\alpha_1/5$ なので、

$$\frac{1}{\alpha_{em}} = \frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha_L} + \frac{5}{3\alpha_1}$$

と表わせる。これから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{em}(Q)} &= \frac{1}{\alpha_L(M_G)} + \frac{22 - 4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_\phi) \frac{n_\phi}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{\frac{3}{2}(n_1 + n_2 + n_3)}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) \\ &+ \frac{5}{3} \left(\frac{1}{\alpha_1(M_G)} - \frac{4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_\phi) \frac{\frac{3n_\phi}{10}}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{\frac{1}{10}(49n_1 + 49n_2 + n_3)}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{em}(M_G)} + \frac{22 - \frac{8}{3}4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_\phi) \frac{n_\phi}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right) - \theta(Q - M_{LQ}) \frac{29(n_1 + n_2) + \frac{5}{3}n_3}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_G}\right)$$

ここに、

$$\frac{1}{\alpha_{em}(M_G)} = \frac{1}{\alpha_L(M_G)} + \frac{5}{3\alpha_1(M_G)} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{em}(M_G)} = \frac{8}{3\alpha_G}$$

である。次に、 α_{em} の表式と α_c の表式から α_G と $\ln(Q/M_G)$ を求める。簡単のため $M_{LQ} = M_\phi$ とする。

$$\ln\left(\frac{M_{LQ}}{M_G}\right) = 6\pi \frac{1}{66 + n_\phi + 7(n_1 + n_2) - n_3} \left(\frac{1}{\alpha_{em}(M_{LQ})} - \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha_c(M_{LQ})} \right)$$

$$\frac{1}{\alpha_G} = \frac{33 - 4N_g + n_\phi - (n_1 + n_2 + n_3)}{66 + n_\phi + 7(n_1 + n_2) - n_3} \left(\frac{1}{\alpha_{em}(M_{LQ})} - \frac{22 - \frac{8}{3}4N_g - n_\phi - \frac{29(n_1 + n_2) + 5n_3}{3}}{33 - 4N_g + n_\phi - (n_1 + n_2 + n_3)} \frac{1}{\alpha_c(M_{LQ})} \right)$$

ここに

$$\frac{1}{\alpha_{em}(Q)} = \frac{1}{\alpha_{em}(M_{LQ})} + \frac{22 - \frac{8}{3}4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_{LQ}}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha_c(Q)} = \frac{1}{\alpha_c(M_{LQ})} + \frac{33 - 4N_g}{6\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_{LQ}}\right)$$

である。実際の様子を見るために、

$$m_z = 91 \text{ GeV}、\alpha_{em}^{-1} = 129、\alpha_c^{-1} = 0.12、$$

を使用して計算する。パラメーターの設定は、

$$M_{LQ} = 300 \text{ GeV}、n_\phi = 1、N_g = 3$$

である。レプトクォークは、

- 1) $S_2 : (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{-7/6}$ は $n_1 + n_2 = (1, 2, 3)$ と変化させ、
- 2) $S_3 : (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{-1/6}$ は $n_3 = (1, 2, 3)$ と変化させ

たときの結果を図 4-1 にグラフで示してある。比較のために、超対称化された $SU(5)^{loc}$ の結果を、破れのスケールを 300 GeV とした。これから

- 1) 標準の $SU(5)^{loc}$ 理論と実験結果は矛盾する
- 2) $S_3 : (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{-1/6}$ レプトクォークを 3 世代含ませると実験を再現する
- 3) 標準の $SU(5)^{loc}$ 理論を超対称化すると実験を再現する

ことがわかる。

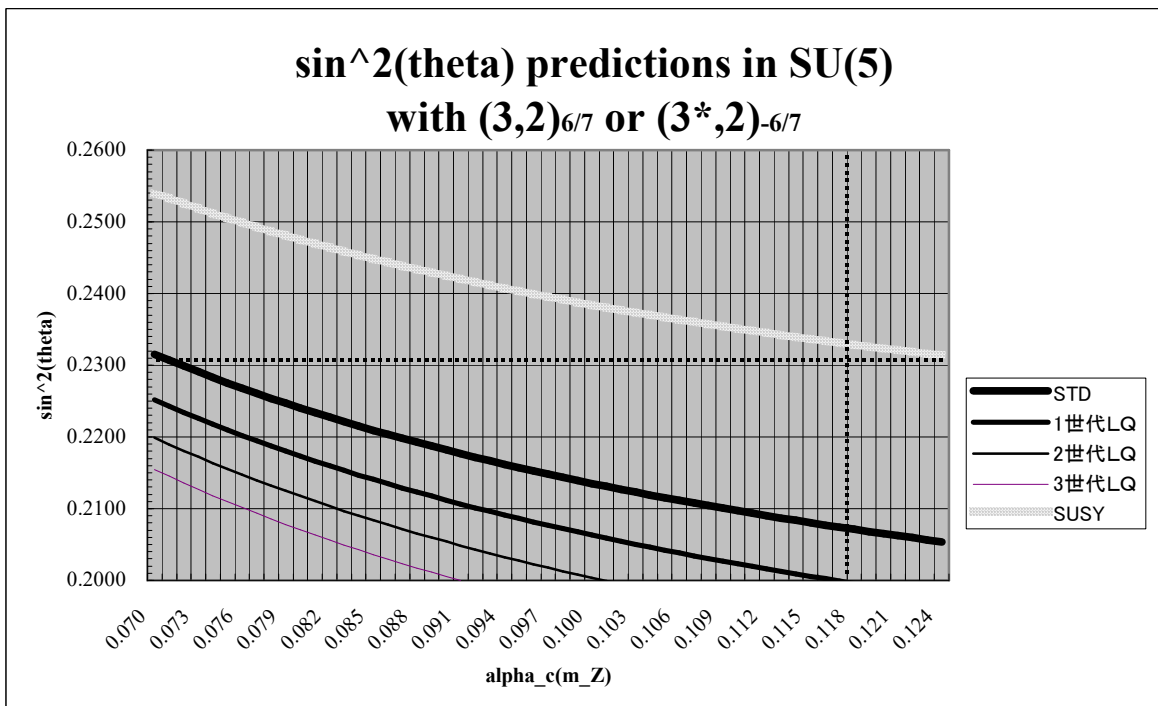
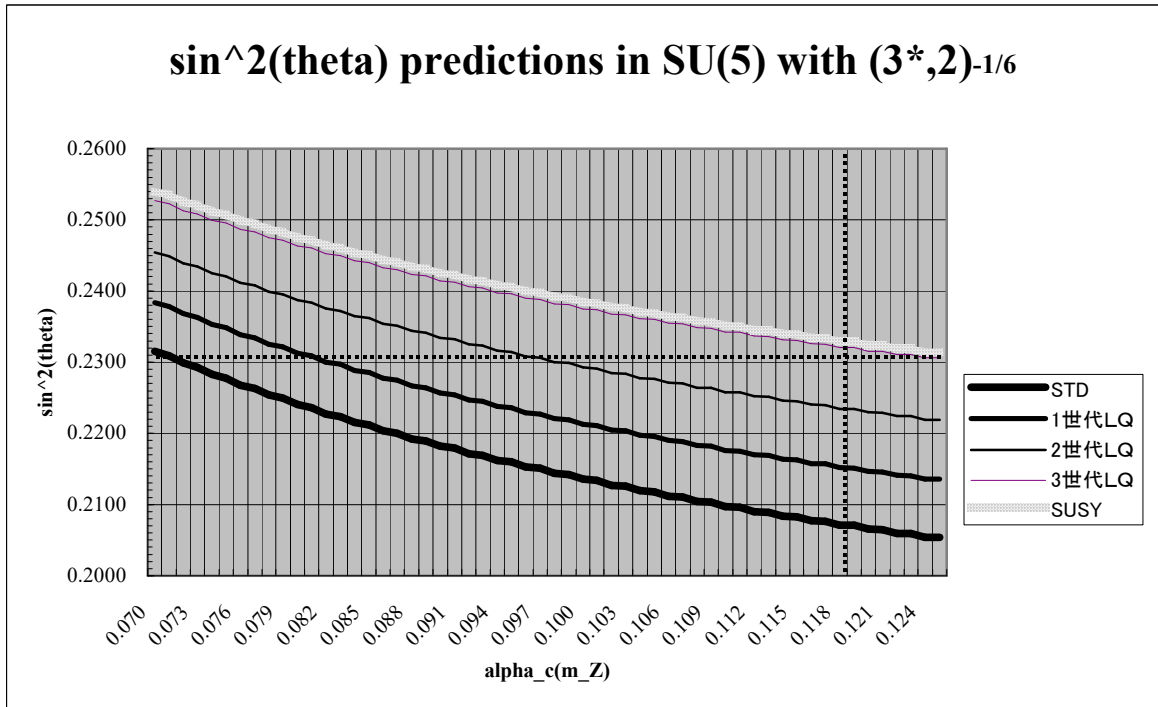


図 4-1 : レプトクォークの影響

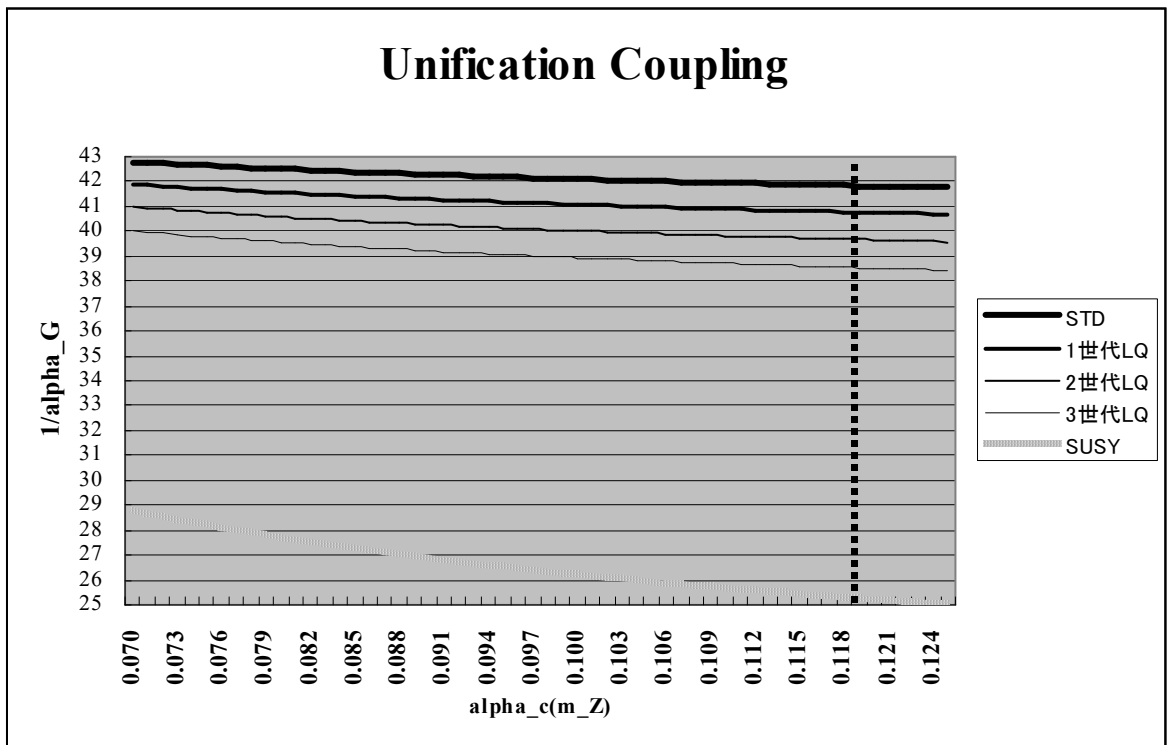
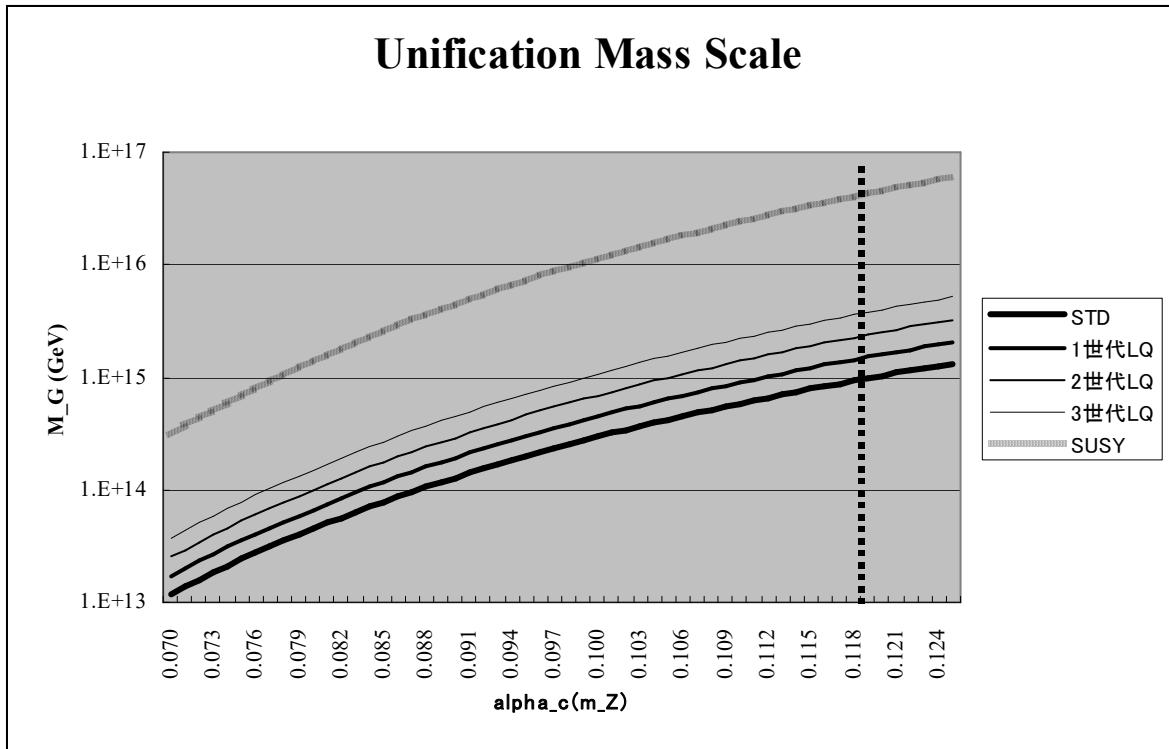


図4-3：統一される質量スケールと結合定数

図4-2には、相互作用が統一される質量スケールを示してある。標準の $SU(5)^{loc}$ 理論では、陽子が早く崩壊しすぎる問題があった。陽子の寿命は、Appendix 3 より大雑把に

$$\Gamma(\text{陽子}) \approx \left(\frac{g_G^2}{M_G^2} \right)^2 m_p^5 \Rightarrow \left(\frac{\alpha_G}{\alpha_L} \frac{m_W^2}{M_G^2} G_F \right)^2$$

と見積もることができる。図4-3より、

$$\alpha_G = \frac{g_G^2}{4\pi} \approx \frac{1}{42}, \quad M_G \approx 10^{15} \text{ GeV}$$

なので、

$$\Gamma(\text{陽子}) = G_X^2 m_p^5 = \left(\frac{\alpha_G m_W^2}{\alpha_L M_G^2} G_F \right)^2 m_p^5$$

ここに

$$\alpha_L = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W} \approx \frac{1/129}{0.23} \approx \frac{1}{30}, \quad G_F \approx (293 \text{ GeV})^{-2}, \quad m_W \approx 80 \text{ GeV}, \quad m_p \approx 0.938 \text{ GeV}$$

を代入して、

$$\Gamma(\text{陽子}) \approx 2.1 \times 10^{-63} \left(\frac{10^{15}}{M_G} \right)^4 \left(\frac{\alpha_G}{42^{-1}} \right)^2 \text{ GeV}$$

これから、 $\hbar c \approx 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ なので、寿命 $\tau(\text{陽子})$ を導くには

$$\text{sec} = \frac{\text{MeV} \cdot \text{fm}}{\text{MeV} \cdot \left(\frac{\text{fm}}{\text{s}} \right)} \Rightarrow \tau(\text{陽子}) = \frac{\hbar c}{\Gamma(\text{陽子})c} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\left(\frac{\Gamma(\text{陽子})}{\text{GeV}} \right) \times 10^3 \text{ MeV} \cdot 3 \times 10^{10} \times 10^{13} \frac{\text{fm}}{\text{sec}}}$$

である。これから、

$$\tau(\text{陽子}) = 3.2 \times 10^{38} \left(\frac{M_G}{10^{15}} \right)^4 \left(\frac{42^{-1}}{\alpha_G} \right)^2 \text{ sec} = 1.0 \times 10^{31} \left(\frac{M_G}{10^{15}} \right)^4 \left(\frac{42^{-1}}{\alpha_G} \right)^2 \text{ 年}$$

陽子内部でのクォークの波動関数の影響など考慮すると、陽子 \rightarrow 陽電子 + π^0 に対して

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} = 2.3 \times 10^{32 \pm 0.7} \left(\frac{M_G}{10^{15} \text{ GeV}} \right)^4 \text{ 年}$$

と評価される。この寿命は、現在のスーパーカミオカンデでの実験からの

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} > 1.6 \times 10^{33} \text{ 年}$$

に抵触してしまう。一方、 $\sin^2 \theta_W$ の実験値を再現する 3 世代のレプトクォークモデルでは、

$$M_G \approx 4 \times 10^{15} \text{ GeV}$$

と計算される。これから

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} = 7 \times 10^{34 \pm 0.7} \text{ 年}$$

これは、将来スーパーカミオカンデでの発見能力： $\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} \approx 10^{34}$ があれば、陽子崩壊が見つかる場合を含んでいる。