

第六章 ニュートリノ振動 : MSW

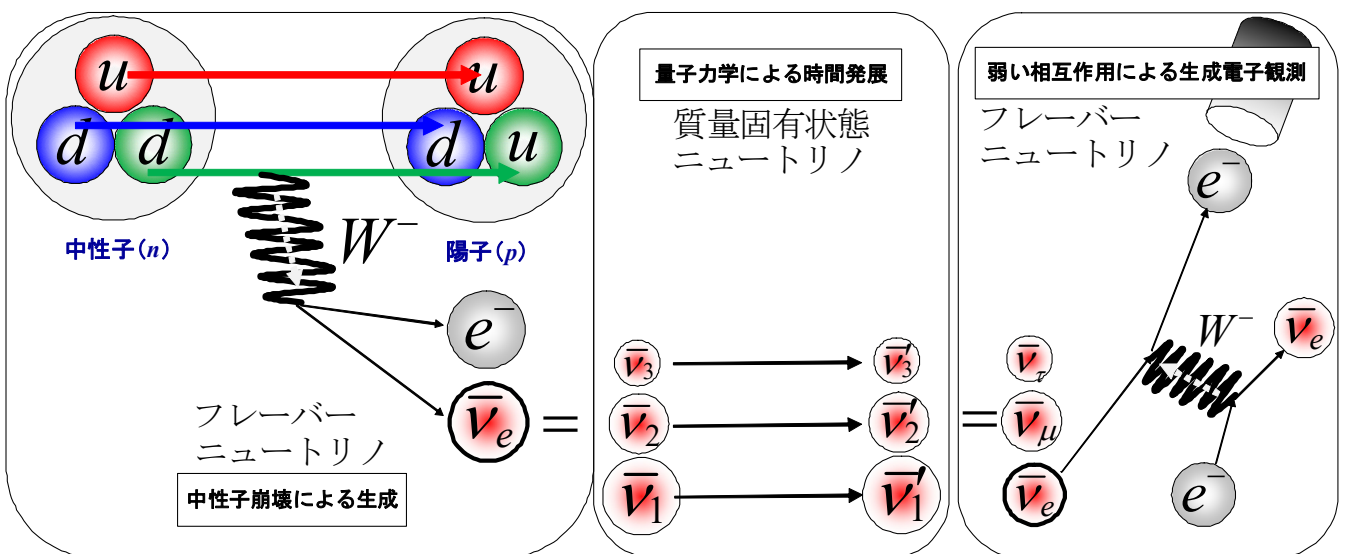
ニュートリノ振動は、精製時・観測時と飛行時の状態が異なることにより発生し、

- 生成されるニュートリノ $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ は、組になる (e^-, μ^-, τ^-) を観測することで、 $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ として観測される。
 - $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$: フレーバーニュートリノ (flavor neutrino) と呼ばれる
 - 弱い相互作用 : $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^- \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu W^{-\mu} \nu_e + \mu^- \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu W^{-\mu} \nu_\mu + \tau^- \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu W^{-\mu} \nu_\tau \right)$
- 生成されるニュートリノ $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ は、生成された瞬間に違う状態 (ν_1, ν_2, ν_3) に変貌し、量子力学に従って時間経過し飛行する。
 - (ν_1, ν_2, ν_3) : 質量固有状態ニュートリノ (neutrino mass eigenstate) と呼ばれる。

➢ 量子力学 :
$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix}$$

➢ 【2世代の例】
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \end{pmatrix}$$

とまとめられる。原因は、ニュートリノの質量を直接観測できないことに依る。模式図で表わすと、



太陽ニュートリノは、太陽内の核融合で生成される電子ニュートリノで、太陽から放出され、地球上のニュートリノ観測所で観測される。量子力学による飛行時には、通常、ニュートリノ

ノは、宇宙空間などで、自由に飛行できる（**真空中の飛行**）。ところが、太陽内部の飛行では、大量の電子が存在するため、 $\nu_e + e^- \rightarrow W^- \rightarrow e^- + \nu_e$ 等が頻繁に起こり、電子ニュートリノの飛行の仕方に無視できない影響を与えることがわかっている（**物質中の飛行**）。その結果、真空中のニュートリノ振動理論に大幅な変更が加わる。¹

太陽ニュートリノ

太陽の中での核融合反応によりニュートリノが生成される。弱い相互作用で生成されるニュートリノは電子ニュートリノになる。とくにボロン 8 (⁸B) から生成される電子ニュートリノを地球上で観測ターゲットにする。そのエネルギーは太陽の標準モデルにより 1~10 MeV であり、このエネルギーのニュートリノが観測にかかるように実験機器を設定しておく。ニュートリノの飛行距離は、太陽と地球の距離の約 10^{11} m である。

太陽ニュートリノ観測結果によると、地球にくるニュートリノの数が太陽の標準モデルよりの期待する理論値のニュートリノの数の約半分（スーパーカミオカンデ観測）であることが示された。

$$\frac{\text{電子ニュートリノ数の観測値}}{\text{電子ニュートリノ数の理論値}} = \text{約} \frac{1}{2} \tag{6.1}$$

1968 年にデービスにより最初に発見された太陽ニュートリノ振動

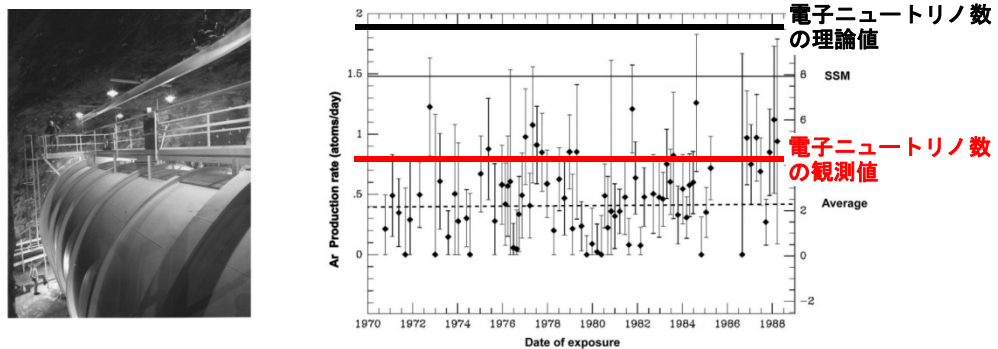
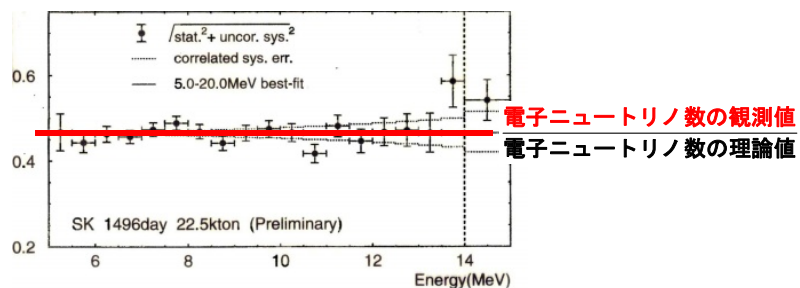


図 4.3: 左図: デービス等の太陽ニュートリノ検出器。615トンの液体 2 塩化炭素をタンクに入れ、ホームステイク 鉱山の地下 1620m に設置した。宇宙線の背景雑音を防ぐため装置全体を水のプールに沈めた。右図: データ。図の左側に一日あたりの反応数、右側に SNU(Solar Neutrino Unit=毎秒 10^{36} 個の塩素原子あたりのニュートリノ捕獲数)を示す。観測値は標準太陽モデル (SSM) の約 1/3 程度であった。

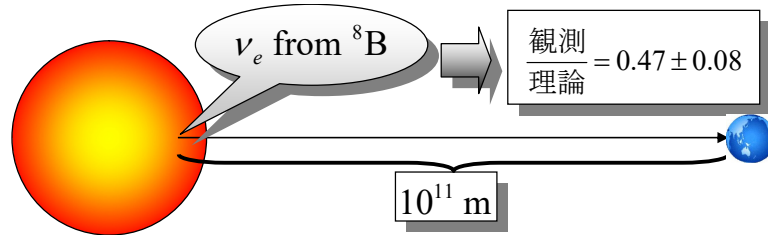
2000 年にスーパーカミオカンデにより再確認された太陽ニュートリノ振動



太陽ニュートリノの飛来の様子は、太陽から放出された電子ニュートリノが宇宙空間を飛行

¹ Lincoln Wolfenstein (1978)により提案され、Stanislav P.Mikheyev と Alexei Y.Smirnov (1986)によって太陽内のニュートリノ振動にも拡張され、**MSW 効果**と呼ばれる

する。その様子を、模式図で表わすと・・・



である。この場合は

$$\Delta m^2 \sim \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})} = \frac{1 \sim 10(\text{MeV})}{10^{11}} = \mathcal{O}(10^{-11 \sim -10} \text{ eV}^2) \quad (6.2)$$

なる。大雑把に

$$\Delta m^2 \sim m_\nu^2 \quad (6.3)$$

とすると、ニュートリノの質量として

$$m_\nu = \mathcal{O}(10^{-5} \text{ eV}) \quad (6.4)$$

になる。残念ながら、この振動は、実験結果から排除された。そこで、

- 太陽内部には電子が一杯あって、宇宙空間と違って、電子ニュートリノは電子と多重散乱する
- 太陽から脱出後、宇宙空間の飛行に移る

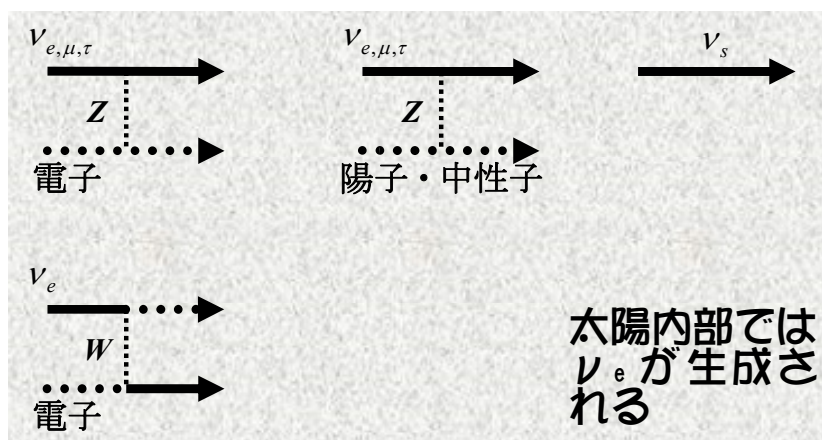
を考慮する必要がある。太陽内部の電子と電子ニュートリノの散乱は

- 4 体フェルミ似相互作用

で記述できることが分かっている。

4 体フェルミ相互作用とニュートリノ

弱い相互作用は近似的に 4 体フェルミ相互作用で記述され、太陽内部の物質（電子・陽子・中性子）とニュートリノの相互作用で終状態にニュートリノを放出するのは



と図示できる。²ステライルニュートリノ (ν_s) は

● 全く $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の弱い相互作用をしない第 4 番目のニュートリノである。3 世代ニュートリノ以外にしばしば W^\pm と Z とまったく相互作用しないこのようなステライルニュートリノが導入される。

太陽中では、

● 核融合にてニュートリノが生成されるので電子ニュートリノが対象になるニュートリノである。生成された電子ニュートリノは、当然太陽中に存在する電子と散乱する。その結果見かけ上ポテンシャル項をどうして質量が現れる。つまり、

$$L = \overline{\nu_{eL}}(x)(i\partial - m_{\nu_e})\nu_{eL}(x) + \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\overline{e(x)}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x))(\overline{\nu_e(x)}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e(x)) \quad (6.5)$$

Fiertz 変換により 4 体フェルミ相互作用項は

$$\begin{aligned} & \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\overline{e(x)}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e(x))(\overline{\nu_e(x)}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e(x)) \\ & \Rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}}\langle \text{太陽} | \overline{e(x)}\gamma_0 e(x) | \text{太陽} \rangle (\overline{\nu_e(x)}\gamma^0(1-\gamma_5)\nu_e(x)) + \dots \\ & = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\langle \text{太陽} | e^\dagger(x)e(x) | \text{太陽} \rangle (2\overline{\nu_{eL}}(x)\gamma^0\nu_{eL}(x)) + \dots \\ & = \sqrt{2}G_F \langle \text{太陽} | e^\dagger(x)e(x) | \text{太陽} \rangle (\overline{\nu_{eL}}(x)\gamma^0\nu_{eL}(x)) + \dots \\ & \Rightarrow E_{induced}(\overline{\nu_e(x)}\gamma^0\nu_e(x)) + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

以下詳しく調べてみる。標準模型でのラグランジアンでは

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e][\overline{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e] \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n = \frac{G_F}{\sqrt{2}} & \left[\overline{u}\gamma_\mu \left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_w - \gamma_5 \right) u - \overline{d}\gamma_\mu \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w - \gamma_5 \right) d - \overline{e}\gamma_\mu (1 - 4\sin^2\theta_w - \gamma_5) e \right] \\ & \times [\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_e + \overline{\nu_\mu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu + \overline{\nu_\tau}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\tau] \end{aligned} \quad (6.8)$$

と記述する (問題 1)。

ここで Fiertz 変換を使用する。つまり、

$$\begin{aligned} & (\overline{\psi^{(1)}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi^{(2)}) (\overline{\psi^{(3)}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi^{(4)}) \\ & = \sum_A c_A (\overline{\psi^{(1)}}\Gamma^A\psi^{(4)}) (\overline{\psi^{(3)}}\Gamma^A\psi^{(2)}) \equiv (\overline{\psi^{(1)}} \otimes \psi^{(4)}) (\overline{\psi^{(3)}} \otimes \psi^{(2)}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

の左辺から右辺への移行を Fiertz 変換と呼ぶ。ただし、

² 太陽内部では核融合の過程で ν_e が放出される。放出されたニュートリノ ν_e は原理的・理論的には太陽内部を飛行中に振動効果により他のニュートリノに変化し、ほんの僅かに $\nu_{\mu,\tau}$ (や ν_s ?) が現れる。

$$\begin{aligned}\Gamma^A &= I(A = \mathbf{Scalar}), \gamma_\mu(A = \mathbf{Vector}), \sigma_{\mu\nu}(A = \mathbf{Tensor}), \\ \gamma_\mu\gamma_5(A = \mathbf{Axial Vector}), \gamma_5(A = \mathbf{Pseudo Scalar})\end{aligned}\quad (6.10)$$

である。具体的には、

$$\begin{aligned}\sum_A c_A \left(\overline{\psi^{(1)}} \Gamma^A \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \Gamma^A \psi^{(2)} \right) &= c_S \left(\overline{\psi^{(1)}} I \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} I \psi^{(2)} \right) + c_P \left(\overline{\psi^{(1)}} \gamma_5 \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \gamma_5 \psi^{(2)} \right) \\ &+ c_V \left(\overline{\psi^{(1)}} \gamma^\mu \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \gamma_\mu \psi^{(2)} \right) + c_A \left(\overline{\psi^{(1)}} \gamma^\mu \gamma_5 \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \gamma_\mu \gamma_5 \psi^{(2)} \right) \\ &+ c_T \left(\overline{\psi^{(1)}} \sigma^{\mu\nu} \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \sigma_{\mu\nu} \psi^{(2)} \right)\end{aligned}\quad (6.11)$$

である。そこで(6.9)のように $\psi^{(2)} \leftrightarrow \psi^{(4)}$ を実現すれば、

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \right] \left[\overline{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \Rightarrow \left(\overline{\nu_e} \otimes \nu_e \right) \left(\overline{e} \otimes e \right)\quad (6.12)$$

になり、その結果、

$$\overline{e} \otimes e \Rightarrow e^\dagger e = \text{電子密度}\quad (6.13)$$

のように電子密度に関連付けられる。そこで、

$$\begin{aligned}\left(\overline{\psi^{(1)}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi^{(2)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi^{(4)} \right) &= \overline{\psi_\alpha^{(1)}} \psi_\beta^{(2)} \overline{\psi_\rho^{(3)}} \psi_\sigma^{(4)} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\alpha\beta} \left(\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\rho\sigma} \\ \left(\overline{\psi^{(1)}} \Gamma^A \psi^{(4)} \right) \left(\overline{\psi^{(3)}} \Gamma^A \psi^{(2)} \right) &= -\overline{\psi_\alpha^{(1)}} \psi_\beta^{(2)} \overline{\psi_\rho^{(3)}} \psi_\sigma^{(4)} \left(\Gamma^A \right)^{\alpha\sigma} \left(\Gamma^A \right)^{\rho\beta}\end{aligned}\quad (6.14)$$

として、

$$\left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\alpha\beta} \left(\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\rho\sigma} = -\sum_A c_A \left(\Gamma^A \right)^{\alpha\sigma} \left(\Gamma^A \right)^{\rho\beta}\quad (6.15)$$

が成立する。さらに

$$(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)\quad (6.16)$$

を利用すると

$$4 \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\alpha\beta} \left(\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right)^{\rho\sigma} = -\sum_A c_A \left(\Gamma^A (1 - \gamma_5) \right)^{\alpha\sigma} \left(\Gamma^A (1 - \gamma_5) \right)^{\rho\beta}\quad (6.17)$$

1) 両辺に $(\gamma^\lambda)^{\beta\rho}, (\gamma_\lambda)^{\sigma\alpha}$ を乗じて (α, β) と (ρ, σ) の Tr をとる。

$$\begin{aligned}4 \text{Tr} \left(\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma^\lambda \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda \right) &= -256 \\ -\sum_A c_A \text{Tr} \left(\Gamma^A (1 - \gamma_5) \gamma_\lambda \right) \text{Tr} \left(\Gamma^A (1 - \gamma_5) \gamma^\lambda \right) &= -64 c_{V-A}\end{aligned}\quad (6.18)$$

ここに、 \sum_A は

$$(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5) = 0\quad (6.19)$$

に注意しての(6.11)代わりに

$$\begin{aligned} \sum_A c_A (\Gamma^A)^{\alpha\sigma} (\Gamma^A)^{\rho\beta} &= c_{S-P} (1-\gamma_5)^{\alpha\sigma} (1-\gamma_5)^{\rho\beta} + c_{S+P} (1+\gamma_5)^{\alpha\sigma} (1+\gamma_5)^{\rho\beta} \\ &+ c_{V-A} (\gamma^\mu (1-\gamma_5))^{\alpha\sigma} (\gamma_\mu (1-\gamma_5))^{\rho\beta} + c_{V+A} (\gamma^\mu (1+\gamma_5))^{\alpha\sigma} (\gamma_\mu (1+\gamma_5))^{\rho\beta} \\ &+ c_T (\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\sigma} (\sigma_{\mu\nu})^{\rho\beta} \end{aligned} \quad (6.20)$$

とできる。これを用いて

$$\begin{aligned} 4\text{Tr}(\gamma_\mu (1-\gamma_5) \gamma^\lambda \gamma^\mu (1-\gamma_5) \gamma_\lambda) &= -256 \\ -\sum_A c_A \text{Tr}(\Gamma^A (1-\gamma_5) \gamma_\lambda) \text{Tr}(\Gamma^A (1-\gamma_5) \gamma^\lambda) &= -64c_{V-A} \end{aligned} \quad (6.21)$$

を得る (問題 2-A)。

2) それ以外は

$$c_{S-P} = c_{S+P} = c_{V+A} = c_T = 0 \quad (6.22)$$

になる (問題 2-B)。

これから

$$-256 = -64c_{V-A} \Rightarrow c_{V-A} = 4 \quad (6.23)$$

を得るので

$$4(\gamma_\mu (1-\gamma_5))^{\alpha\beta} (\gamma^\mu (1-\gamma_5))^{\rho\sigma} = -4(\gamma_\mu (1-\gamma_5))^{\alpha\sigma} (\gamma^\mu (1-\gamma_5))^{\rho\beta} \quad (6.24)$$

故に

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_\rho^{(1)} \psi_\beta^{(2)} \overline{\psi}_\rho^{(3)} \psi_\sigma^{(4)} (\gamma_\mu (1-\gamma_5))^{\alpha\beta} (\gamma^\mu (1-\gamma_5))^{\rho\sigma} \\ = -\overline{\psi}_\rho^{(1)} \psi_\beta^{(2)} \overline{\psi}_\rho^{(3)} \psi_\sigma^{(4)} (\gamma_\mu (1-\gamma_5))^{\alpha\sigma} (\gamma^\mu (1-\gamma_5))^{\rho\beta} \end{aligned} \quad (6.25)$$

つまり

$$\overline{\psi}^{(1)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi^{(2)} \overline{\psi}^{(3)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi^{(4)} = \overline{\psi}^{(1)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi^{(4)} \overline{\psi}^{(3)} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi^{(2)} \quad (6.26)$$

である。これを Fiertz 変換といい、

- V-A 型は Fiertz 変換に対して不変である

性質がある。

太陽内のニュートリノ有効相互作用

これを適用して、太陽内の電子や陽子・中性子とニュートリノの相互作用の影響を調べる。そのために、

- 平均場近似を用いる

こととなる。さて、

$$v_{eL} \equiv \frac{1-\gamma_5}{2} v_e \quad (6.27)$$

を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ch} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \right] \left[\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \stackrel{\text{Fiertz trans.}}{=} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \left[\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \right] \\ &= \sqrt{2} G_F \left[\bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} \right] \left[\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \right]\end{aligned}\quad (6.28)$$

になる。同様に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n &= \sqrt{2} G_F \left[\bar{u} \gamma_\mu \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w - \gamma_5 \right) u - \bar{d} \gamma_\mu \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w - \gamma_5 \right) d - \bar{e} \gamma_\mu (1 - 4 \sin^2 \theta_w - \gamma_5) e \right] \\ &\quad \times \left[\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_e + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \nu_{\mu L} + \bar{\nu}_{\tau L} \gamma^\mu \nu_{\tau L} \right]\end{aligned}\quad (6.29)$$

を考慮する。

これに平均場近似を適用しニュートリノの有効相互作用を導く。太陽では核融合の過程から電子ニュートリノが放出され地球に到達する。電子ニュートリノに着目すると運動方程式は

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}_{eL} i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} - m_{\nu_e} \left(\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR}^C + \bar{\nu}_{eR}^C \nu_{eL} \right) + \mathcal{L}_{ch} + \mathcal{L}_n = -\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} - m_{\nu_e} \left(\bar{\nu}_{eL} \nu_{eR}^C + \bar{\nu}_{eR}^C \nu_{eL} \right) + \mathcal{L}_{ch} + \mathcal{L}_n\quad (6.30)$$

から

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\nu}_{eL})} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\nu}_{eL}}\quad (6.31)$$

で導かれる (問題 3-A) ので、

$$\begin{aligned}-i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} &= -m_{\nu_e} \nu_{eR}^C + \left(\sqrt{2} G_F \left[\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \right] \right) (\gamma_\mu \nu_{eL}) \\ &\quad + \left(\sqrt{2} G_F \left[\bar{u} \gamma^\mu \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w - \gamma_5 \right) u - \bar{d} \gamma^\mu \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w - \gamma_5 \right) d - \bar{e} \gamma^\mu (1 - 4 \sin^2 \theta_w - \gamma_5) e \right] \right) (\gamma_\mu \nu_{eL})\end{aligned}\quad (6.32)$$

を得る (問題 3-B) これから、平均場近似に移行すると非相対論的影響のみ考慮するので

$$\bullet \text{ ポテンシャル項 } (\gamma^0 \text{ 成分}) \text{ のみ、かつ } \gamma_5 \text{ 項は無視できる}\quad (6.33)$$

ことがわかる (問題 4)。 ν_{eL} の係数が平均場の中での値 (ポテンシャル項) として置き換えられる。その結果、運動方程式を

$$\left[i \gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^0 (V^{ch} + V^n) \right] \nu_{eL} - m_{\nu_e} \nu_{eR}^C = 0\quad (6.34)$$

ここで

$$V^{ch} = \sqrt{2} G_F \langle e^\dagger e \rangle$$

$$V^n = \sqrt{2}G_F \left[\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_w\right) \langle u^\dagger u \rangle - \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w\right) \langle d^\dagger d \rangle - (1 - 4\sin^2\theta_w) \langle e^\dagger e \rangle \right] \quad (6.35)$$

になる。少し書き換えて

$$\left[\gamma^\mu p_\mu + \gamma^0 (V^{ch} + V^n) \right] v_{eL} - m_{\nu_e} v_{eR}^C = \left[\gamma^0 (E + V^{ch} + V^n) - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} \right] v_{eL} - m_{\nu_e} v_{eR}^C \quad (6.36)$$

になるので、電子ニュートリノのエネルギーは

$$E_{\nu_e} = E + V^{ch} + V^n \quad (6.37)$$

に変化する。また、ミューニュートリノやタウニュートリノ ($\nu_{\mu,\tau}$) の荷電相互作用、 \mathcal{L}_{ch} に

は $[\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] [\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\tau]$ があるが、(6.35) を導くと同様の手続きで

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] [\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\tau] = \sqrt{2}G_F [\bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{\tau L}] \left[\boxed{\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\tau} \right] \quad (6.38)$$

になるので、 $\langle e^\dagger e \rangle$ の項からの効果ない。

以上をまとめると

ν_e	$E_{\nu_e} = E + V^{ch} + V^n$
$\nu_{\mu,\tau}$	$E_{\nu_{\mu,\tau}} = E + V^n$
ν_s	$E_{\nu_s} = E$

$$V^{ch} = \sqrt{2}G_F \langle e^\dagger e \rangle$$

$$V^n = \sqrt{2}G_F \left[\left(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_w\right) \langle u^\dagger u \rangle - \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w\right) \langle d^\dagger d \rangle - (1 - 4\sin^2\theta_w) \langle e^\dagger e \rangle \right] \quad (6.39)$$

である (問題 5)。この表式がニュートリノ振動の解析に使用される。特に、電子ニュートリノの場合には、エネルギー固有値が

$$E + V^{ch} + V^n \quad (6.40)$$

に変更されるので

$$|v_e(t)\rangle = \exp(-iH\Delta t) |v_e(t_0)\rangle \quad (H = E + V^{ch} + V^n; \Delta t = t - t_0) \quad (6.41)$$

になる。

物質によるニュートリノ振動

このエネルギーの表式を使用してもう一度ニュートリノ振動を調べてみよう。平均場の影響

は弱い相互作用を通してあらわれるので、 (ν_e, ν_μ) が基準になる。対応する時間発展は、(5.43) を用いると

$$H_{vac} = -\frac{\Delta m^2}{4E} (\sigma^3 \cos 2\theta - \sigma^1 \sin 2\theta), \quad i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = H_{vac} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

で記述される。ここで、平均場の影響を取り入れると、

$$H = H_{vac} + \begin{pmatrix} V^{ch} + V^n & 0 \\ 0 & V^n \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

になる。ここで、全体にかかる位相は物理的に意味がなくなるので

$$H = H_{vac} + \begin{pmatrix} V^{ch} + V^n & 0 \\ 0 & V^n \end{pmatrix} = H_{vac} + \frac{V^{ch} + 2V^n}{2} I + \frac{V^{ch}}{2} \sigma^3 \quad (6.45)$$

より、結果として

$$H_{matter} = H_{vac} + \frac{V^{ch}}{2} \sigma^3 \quad (6.46)$$

を得る (問題 6)。また

$$H_{vac} = -\frac{\Delta m^2}{4E} (\sigma^3 \cos 2\theta - \sigma^1 \sin 2\theta) \quad (6.47)$$

を代入して、整理すると

$$H_{matter} = \left(-\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{V^{ch}}{2} \right) \sigma^3 + \frac{\Delta m^2}{4E} \sigma^1 \sin 2\theta \quad (6.48)$$

になる。

今回は、平均場による余分な項があるので、

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

で

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

のように対角型にはならない。そこで、あらたに

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^M(t) \\ \nu_2^M(t) \end{pmatrix} \equiv U_M \begin{pmatrix} \nu_1^M(t) \\ \nu_2^M(t) \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

により対角化する。対角化されたハミルトニアンを H_{matter}^{diag} とすると

$$H_{matter} = U_M H_{matter}^{diag} U_M^\dagger \quad (6.52)$$

が条件になる (問題 7)。平均場近似での時間発展は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\nu_1^M(t)\rangle \\ |\nu_2^M(t)\rangle \end{pmatrix} = H_{matter}^{diag} \begin{pmatrix} |\nu_1^M(t)\rangle \\ |\nu_2^M(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

になる。

計算を実行しよう。

$$\begin{aligned} H_{matter} &= \left(-\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{V^{ch}}{2} \right) \sigma^3 + \frac{\Delta m^2}{4E} \sigma^1 \sin 2\theta \equiv -A \sigma^3 + B \sigma^1 \\ A &= \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{V^{ch}}{2}, \quad B = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ H_{matter}^{diag} &= U_M^\dagger H_{matter} U_M \end{aligned} \quad (6.54)$$

故に、

$$\begin{aligned} H_{matter}^{diag} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_M & -\sin \theta_M \\ \sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\cos^2 \theta_M - \sin^2 \theta_M)A - 2 \cos \theta_M \sin \theta_M B & (\cos^2 \theta_M - \sin^2 \theta_M)B - 2 \cos \theta_M \sin \theta_M A \\ (\cos^2 \theta_M - \sin^2 \theta_M)B - 2 \cos \theta_M \sin \theta_M A & (\cos^2 \theta_M - \sin^2 \theta_M)A + 2 \cos \theta_M \sin \theta_M B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.55)$$

を得る。これを対角型すると

$$H_{matter}^{diag} = -\sigma^3 \sqrt{A^2 + B^2} \quad (6.56)$$

になり、混合角 θ_M は

$$\sin 2\theta_M = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos 2\theta_M = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.57)$$

で与えられる (問題 8)。以上から、

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |v_1^M(t)\rangle \\ |v_2^M(t)\rangle \end{pmatrix} = H_{matter}^{diag} \begin{pmatrix} |v_1^M(t)\rangle \\ |v_2^M(t)\rangle \end{pmatrix} \text{ with } H_{matter}^{diag} = -\sigma^3 \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\begin{pmatrix} v_e(t) \\ v_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^M(t) \\ v_2^M(t) \end{pmatrix} \text{ with } \sin 2\theta_M = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos 2\theta_M = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.58)$$

$$A = \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{V^{ch}}{2}, B = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta$$

になる。

共鳴ニュートリノ振動

ここで、混合角の表式を調べてみよう。

$$\sin 2\theta_M = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos 2\theta_M = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.59)$$

$$A = \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{V^{ch}}{2}, B = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta$$

になっている。最大に混合 ((5.14)参照) が起こるのは

$$\sin 2\theta_M = 1 \Rightarrow \theta_M = 45^\circ \quad (6.60)$$

であり

$$A = 0 \Rightarrow \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta = \frac{V^{ch}}{2} \quad (6.61)$$

を得る。この特別な条件を

- 共鳴現象 (resonance phenomena)

と呼ぶ。この条件は

$$V^{ch} = \sqrt{2} G_F \langle e^\dagger e \rangle \quad (6.62)$$

を用いると、(6.61)は

$$\langle e^\dagger e \rangle = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2} E G_F} (\equiv \langle e^\dagger e \rangle^{crit}) \quad (6.63)$$

になる。この条件を満たしている場合には、

- 最初のニュートリノ質量がいくつであっても、最大の混合になる

ことが特徴である。また、ハミルトニアンは $H_{matter}^{diag} = -\sigma^3 \sqrt{A^2 + B^2}$ なので

$$H_{matter}^{diag} = -B\sigma^3 = -\frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{4E} \sigma^3 \quad (6.64)$$

で与えられる。

結果として、振動は

$$H_{diag} = -\frac{\Delta m^2}{4E} \sigma^3 \quad (6.65)$$

のときに

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E} \quad (6.66)$$

になることから、

$$H_{matter}^{diag} = -\frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{4E} \sigma^3 \quad (6.67)$$

のときには

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \frac{(\Delta m^2 \sin 2\theta)L}{4E} = \sin^2 \frac{\Delta m^2 L \sin 2\theta}{4E} \quad (6.68)$$

が導かれる。この結果、

- $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = 1 \Rightarrow \nu_e$ から ν_μ への完全転化

が起これる。これは、

$$\frac{\Delta m^2 L \sin 2\theta}{4E} = \frac{(2n+1)\pi}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.69)$$

の時に起こることがわかる。以上から

	θ_M	$\langle e^\dagger e \rangle (\equiv n_e)$	$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = 1$
混合最大	45°	$\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}\hbar E G_F}$	$\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 L \sin 2\theta}{4E\hbar} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

になる。従って、

$$E_{\nu_e} - E_{\nu_\mu} = V^{ch} = \sqrt{2}G_F N_e = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2E} \sim \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (6.70)$$

より、大雑把に

$$\Delta m^2 \sim \sqrt{2}G_F E N_e \quad (6.71)$$

として実験からニュートリノの質量の 2 乗差がわかる。

Δm_{21}^2 の理論的予言を、エラー! 参照元が見つかりません。より求めてみる。単位を揃えて、

- $\Delta m^2 c^2 \sim 2\sqrt{2}\hbar c G_F E n_e$

使用する数値として

- n_e の基準値として、エラー! 参照元が見つかりません。
- E の基準値として 10 MeV

を選び

- $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ ($1\text{fm} = 10^{-13} \text{ cm}$)
- G_F として、 $\frac{G_F}{(\hbar c)^2} = 1.16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ ($1\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$)

を用いて計算すれば

$$\Delta m_{21}^2 c^4 \sim 2\sqrt{2}\hbar c G_F E n_e = 1.51 \times 10^{-4} \left(\frac{E}{10 \text{ MeV}} \right) \left(\frac{n_e}{100 \times N_A / \text{cm}^3} \right) \text{ eV}^2 \quad (6.72)$$

程度になる。2013 年の実験データより、 (ν_e, ν_μ) ではなく、 $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ での解析結果は

	Free Fluxes + RSBL		Huber Fluxes, no RSBL	
	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.302^{+0.013}_{-0.012}$	0.267 → 0.344	$0.311^{+0.013}_{-0.013}$	0.273 → 0.354
$\theta_{12}/^\circ$	$33.36^{+0.81}_{-0.78}$	31.09 → 35.89	$33.87^{+0.82}_{-0.80}$	31.52 → 36.49
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.413^{+0.037}_{-0.025} \oplus 0.594^{+0.021}_{-0.022}$	0.342 → 0.667	$0.416^{+0.036}_{-0.029} \oplus 0.600^{+0.019}_{-0.026}$	0.341 → 0.670
$\theta_{23}/^\circ$	$40.0^{+2.1}_{-1.5} \oplus 50.4^{+1.3}_{-1.3}$	35.8 → 54.8	$40.1^{+2.1}_{-1.6} \oplus 50.7^{+1.2}_{-1.5}$	35.7 → 55.0
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.0227^{+0.0023}_{-0.0024}$	0.0156 → 0.0299	$0.0255^{+0.0024}_{-0.0024}$	0.0181 → 0.0327
$\theta_{13}/^\circ$	$8.66^{+0.44}_{-0.46}$	7.19 → 9.96	$9.20^{+0.41}_{-0.45}$	7.73 → 10.42
$\delta_{\text{CP}}/^\circ$	300^{+66}_{-138}	0 → 360	298^{+59}_{-145}	0 → 360
$\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5} \text{ eV}^2}$	$7.50^{+0.18}_{-0.19}$	7.00 → 8.09	$7.51^{+0.21}_{-0.15}$	7.04 → 8.12
$\frac{\Delta m_{31}^2}{10^{-3} \text{ eV}^2}$ (N)	$+2.473^{+0.070}_{-0.067}$	+2.276 → +2.695	$+2.489^{+0.055}_{-0.051}$	+2.294 → +2.715
$\frac{\Delta m_{32}^2}{10^{-3} \text{ eV}^2}$ (I)	$-2.427^{+0.042}_{-0.065}$	-2.649 → -2.242	$-2.468^{+0.073}_{-0.065}$	-2.678 → -2.252

Table 1. Three-flavour oscillation parameters from our fit to global data after the Neutrino 2012 conference. For “Free Fluxes + RSBL” reactor fluxes have been left free in the fit and short baseline reactor data (RSBL) with $L \lesssim 100$ m are included; for “Huber Fluxes, no RSBL” the flux prediction from [42] are adopted and RSBL data are not used in the fit.

より、

$$\Delta m_{21}^2 c^4 = 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (6.73)$$

と得られている。 (ν_e, ν_μ) で簡単化した予言と、良い一致をしている事が分かる。

第六章問題

- 1) 標準模型のラグランジアンから(6.8)を導け。
 2) A) (6.18)を導け。
 B) (6.22)を次の結果を用いて導け。

(1) 両辺に $(1-\gamma_5)^{\beta\rho}, (1-\gamma_5)^{\sigma\alpha}$ を乗じて (α, β) と (ρ, σ) の Tr をとる

(2) 両辺に $(1+\gamma_5)^{\beta\rho}, (1+\gamma_5)^{\sigma\alpha}$ を乗じて (α, β) と (ρ, σ) の Tr をとる

(3) 両辺に $(\gamma^\mu(1+\gamma_5))^{\beta\rho}, (\gamma_\mu(1+\gamma_5))^{\sigma\alpha}$ を乗じて (α, β) と (ρ, σ) の Tr をとる

(4) 両辺に $(\sigma^{\mu\nu}(1+\gamma_5))^{\beta\rho}, (\sigma_{\mu\nu}(1+\gamma_5))^{\sigma\alpha}$ を乗じて (α, β) と (ρ, σ) の Tr をとる

- 3) A) (6.31)を「作用不変の原理」から導け。
 B) (6.32)を導け。
 4) (6.33)を説明せよ。ここで、

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

として、(6.32)を代表して

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu(V - A\gamma_5)\psi)(\gamma_\mu\varphi_L)$$

を

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

の表示を用いて書き換えたときに非相対論近似では u のみから成る項が主な寄与になることから議論するとよい。

- 5) (6.39)の表にある ν_s に対する $E_{\nu_s} = E$ の関係式を導け。
 6) (6.46)を導け。
 7) (6.52)を導け。
 8) (6.56)と(6.57)を導け。
 9) (6.60)に対比して、ほとんど混合が起こらない場合を議論せよ。