第八章　ニュートリノ質量行列

３種混合

フレーバーニュートリノ(ν_e,ν_μ,ν_τ)と質量固有状態のニュートリノ(ν_1,ν_2,ν_3)は、ユニタリー変換で結びつく。(5.12)の(ν_e,ν_μ)と(ν_1,ν_2)の場合の

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_{12} & \sin\theta_{12}\\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} \tag{8.1}$$

以外に、

$$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_{23} & \sin\theta_{23}\\ -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix} \tag{8.2}$$

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_{13} & \sin\theta_{13}\\ -\sin\theta_{13} & \cos\theta_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_3\end{pmatrix} \tag{8.3}$$

を導入する。[1]　ここに、

- (8.1)は、太陽ニュートリノ振動に主に寄与するニュートリノ混合
- (8.2)は、大気ニュートリノ振動に主に寄与するニュートリノ混合

として考えられている。そのとき、(ν_1,ν_2,ν_3)の混合から(ν_e,ν_μ,ν_τ)を出す行列として、(ν_1,ν_2,ν_3)を(8.1)→(8.3)→(8.2)の順番で混合させる

$$U_{PMNS}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23}\\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13}\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0\\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_{12}\cos\theta_{13} & \sin\theta_{12}\cos\theta_{13} & \sin\theta_{13}\\ -\cos\theta_{23}\sin\theta_{12}-\sin\theta_{23}\cos\theta_{12}\sin\theta_{13} & \cos\theta_{23}\cos\theta_{12}-\sin\theta_{23}\sin\theta_{12}\sin\theta_{13} & \sin\theta_{23}\cos\theta_{13}\\ \sin\theta_{23}\sin\theta_{12}-\cos\theta_{23}\cos\theta_{12}\sin\theta_{13} & -\sin\theta_{23}\cos\theta_{12}-\cos\theta_{23}\sin\theta_{12}\sin\theta_{13} & \cos\theta_{23}\cos\theta_{13}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=U_{PMNS}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix} \tag{8.4}$$

を標準のユニタリー行列として採用している（(4.41)参照）（問題０）。ユニタリー行列の名称U_{PMNS}は、最初にニュートリノ混合に気がついた物理学者：

- B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP (Soviet Physics: Journal of Experimental and Theoretical Physics) **7** (1958), p.172 [ロシア語版：Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1958), p. 247]

---

[1] 複素数まで許すと、$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_{13} & \sin\theta_{13}e^{-i\delta}\\ -\sin\theta_{13}e^{i\delta} & \cos\theta_{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_3\end{pmatrix}$及び、$U_{PMNS}\to U_{PMNS}\times\begin{pmatrix}e^{i\varphi_1} & 0 & 0\\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0\\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3}\end{pmatrix}$と変更される。このとき、(8.9)の $M_{\rm mass}=U^\dagger_{PMNS}M_{\rm weak}U_{PMNS}\to M_{\rm mass}=U^T_{PMNS}M_{\rm weak}U_{PMNS}$ も変更受ける。

- Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. (Progress of Theoretical Physics) **28** (1962), p. 870.

に因んで、

- Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS)行列

と付けられた（(4.40)参照）。(8.4)の表記として

$$\left|\text{weak}\right\rangle = U_{PMNS}\left|\text{mass}\right\rangle \Leftarrow \begin{cases} \left|\text{weak}\right\rangle = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix},\ \left|\text{mass}\right\rangle = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \\ \left\langle\text{weak}\right| = \left(\nu_e^T, \nu_\mu^T, \nu_\tau^T\right),\ \left\langle\text{mass}\right| = \left(\nu_1^T, \nu_2^T, \nu_3^T\right) \end{cases} \tag{8.5}$$

を使うことがある。マヨラナニュートリノ(Majorana neutrino)の質量項は、(4.46)より、本章の表記に直して

$$-\mathcal{L}_{majorana\ mass} = -\frac{1}{2}\left\langle\text{weak}\right|C^{-1}M_\nu\left|\text{weak}\right\rangle + (\text{H.c.}) = -\frac{1}{2}\left\langle\text{mass}\right|C^{-1}M_{mass}\left|\text{mass}\right\rangle + (\text{H.c.}) \tag{8.6}$$

である。以降、便宜上$-C^{-1}$を省略して

$$-\mathcal{L}_{majorana\ mass} = \frac{1}{2}\left\langle\text{weak}\right|M_\nu\left|\text{weak}\right\rangle + (\text{H.c.}) = \frac{1}{2}\left\langle\text{mass}\right|M_{mass}\left|\text{mass}\right\rangle + (\text{H.c.}) \tag{8.7}$$

と表す。ここに、

- M_νは 3×3 の行列であり、その個々の要素がフレーバーニュートリノの質量

- M_{mass}は 3×3 の対角行列であり、$m_{1,2,3}$はニュートリノの質量とすると

$$M_{mass} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

を与える。(8.5)と(8.6)から、

$$M_{\text{mass}} = U_{PMNS}^\dagger M_{\text{weak}} U_{PMNS} \tag{8.9}$$

である（問題１）。

実験結果

さて、この混合角$(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})$に対して、現在の実験値は、

$$\boxed{\sin^2\theta_{12} = 0.314\left(1\begin{matrix}+0.18\\-0.15\end{matrix}\right),\ \ \sin^2\theta_{23} = 0.44\left(1\begin{matrix}+0.41\\-0.22\end{matrix}\right),\ \ \sin^2\theta_{23} = \left(0.9\begin{matrix}+2.3\\-0.9\end{matrix}\right)\times 10^{-2}} \tag{8.10}$$

である。また、ニュートリノの質量について、

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta m_{atm}^2 \equiv \left|m_3^2 - m_1^2\right| \\ &\Delta m_{\odot}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2\end{aligned}} \tag{8.11}$$

と定義すると

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta m_{atm}^2 = 2.4\left(1\begin{matrix}+0.21\\-0.26\end{matrix}\right)\times 10^{-3}\ \mathrm{eV}^2 \\ &\Delta m_{\odot}^2 = 7.92\left(1\pm 0.09\right)\times 10^{-5}\ \mathrm{eV}^2\end{aligned}} \tag{8.12}$$

ここで、

$$\boxed{m_2^2 > m_1^2} \tag{8.13}$$

に注意する。これら実験結果から、ニュートリノ振動の大まかな性質として

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta_{23} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta_{23} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\sin^2\theta_{13} = 0 \Rightarrow \sin\theta_{13} = 0\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\frac{\Delta m_{\odot}^2}{\Delta m_{atm}^2} << 1 \tag{8.15}$$

を得ることができる。[2] この質量２乗差から、ニュートリノの質量自身 $m_{1,2,3}$ を求めると、３通りの取り方ができることが分かっている。それは、

$$\begin{aligned}&\text{Normal mass hierarchy}\left(\text{順質量階層}\right)\quad \cdots m_1^2 < m_2^2 << m_3^2 \\ &\text{Inverted mass hierarchy}\left(\text{逆質量階層}\right)\quad \cdots m_3^2 << m_1^2 < m_2^2 \\ &\text{Degenerate mass pattern}\left(\text{縮退質量型}\right)\cdots m_2^2 - m_1^2,\ \left|m_3^2 - m_1^2\right| << m_1^2 \sim m_2^2 \sim m_3^2\end{aligned} \tag{8.16}$$

である。更に、(8.15)の特徴を強調すると

$$\begin{aligned}&\Delta m_{\odot}^2 \approx 0 \\ &m_2^2 \approx m_1^2\end{aligned} \tag{8.17}$$

である。

大気ニュートリノの最大混合と μ-τ（置換）対称性

さて、実験から導き出されたニュートリノ振動の性質が、理論で用いられる(8.4)や(8.9)に何を示唆しているか調べてみる。そこで、(8.14)での $\sin\theta_{23} = 1/\sqrt{2}$ を用いて、(8.2)に代入すると・・・

$$\begin{pmatrix}\nu_\mu \\ \nu_\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_2 \\ \nu_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_2 \\ \nu_3\end{pmatrix} \tag{8.18}$$

である。逆変換で表すと・・・

[2] $\sin^2\theta_{12} = \dfrac{1}{3}$ も有望視されている値である。この値を重視する混合角を用いる時を tri-bimaximal 混合という。ここでは、この値は用いないで解析を進める。

$$\nu_2 = \frac{\nu_\mu - \nu_\tau}{\sqrt{2}},\ \nu_3 = \frac{\nu_\mu + \nu_\tau}{\sqrt{2}} \tag{8.19}$$

であるので、どちらも混合の割合が1:1であることが分かる。このことから、(8.19)で表せる混合を最大混合(maximal mixing)とよぶ。即ち、

- 大気ニュートリノ振動は、ν_μとν_τの最大混合の結果

である事が分かる。実際には、フレーバーニュートリノの$\left(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\right)$の混合であるので、(8.19)には$\nu_e$の成分が現れ、その分がズレてくる（(8.24)参照）。

(8.14)のニュートリノ混合の特徴をもう少し調べるために、(8.9)より得られる

$$M_{\text{weak}} = U_{PMNS} M_{\text{mass}} U_{PMNS}^\dagger \tag{8.20}$$

に、(8.14)を代入して（$\sin\theta_{23} = 1/\sqrt{2}$）結果を

$$M_{\text{weak}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

で表すと、

$$\begin{aligned} a &= m_1 \cos^2\theta_{12} + m_2 \sin^2\theta_{12} \\ b &= -c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(m_2 - m_1\right)\sin\theta_{12}\cos\theta_{12} \\ d &= f = \frac{1}{2}\left(m_1 \sin^2\theta_{12} + m_2 \cos^2\theta_{12} + m_3\right) \\ e &= -\frac{1}{2}\left(m_1 \sin^2\theta_{12} + m_2 \cos^2\theta_{12} - m_3\right) \end{aligned} \tag{8.22}$$

を得る（問題２）。即ち、(8.21)は

$$M_{\text{weak}} = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & d & e \\ -b & e & d \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

と表されることになる。また、ニュートリノは

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos\theta_{12}\nu_e - \sin\theta_{12}\frac{\nu_\mu - \nu_\tau}{\sqrt{2}} \\ \nu_2 &= \sin\theta_{12}\nu_e + \cos\theta_{12}\frac{\nu_\mu - \nu_\tau}{\sqrt{2}} \\ \nu_3 &= \frac{\nu_\mu + \nu_\tau}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{8.24}$$

と表される。$\left(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau\right)$で表された質量項は(8.23)を(8.7)に代入して、

$$-\mathcal{L}_{majorana\ mass}=\frac{1}{2}\left[a\nu_e^T\nu_e+b\nu_e^T\left(\nu_\mu-\nu_\tau\right)+b\left(\nu_\mu^T-\nu_\tau^T\right)\nu_e+d\left(\nu_\mu^T\nu_\mu+\nu_\tau^T\nu_\tau\right)+e\left(\nu_\mu^T\nu_\tau+\nu_\tau^T\nu_\mu\right)\right] \tag{8.25}$$

を得る（問題３）。

マヨラナ質量項(8.25)は、

- $\nu_\mu\to-\nu_\tau,\ \nu_\tau\to-\nu_\mu$ の同時入れ替え　(8.26)

に対して$\mathcal{L}_{majorana\ mass}$が不変である、という性質を持っている。このように「$\mathcal{L}_{majorana\ mass}$が不変である」のは、$\mathcal{L}_{majorana\ mass}$に対称性があることを示唆している。この対称性をニュートリノ振動における

- μ-τ（置換）対称性

という。この対称性は、数学的には 2 つの要素の入れ替えとして

- Z_2 対称性

という。一般に、Z_N 対称性には、N 個の要素があり、それぞれの要素は N 個の演算子 $T_{n=0,1,2,\cdots N-1}$ ：

$$T_n=\exp\left(i\frac{2\pi}{N}n\right)\ \left(n=0,1,2,\cdots N-1\right) \tag{8.27}$$

で変換され移り合う。ここで、N 個の演算子 $T_{n=0,1,2,\cdots N-1}$ は、

$$\left(T_n\right)^N=1 \tag{8.28}$$

を満たしている。

さて、μ-τ（置換）対称性の Z_2 対称性では、2 つの要素は $T_0=1$ と $T_1=-1$ で変換される。2 つの要素を$\left(\nu_+,\nu_-\right)$とすると、

$$\begin{aligned}\nu_+'&=T_0\nu_+=+\nu_+\\ \nu_-'&=T_1\nu_-=-\nu_-\end{aligned} \tag{8.29}$$

である。また、更に分かることはν_eに対しては

$$\nu_e'=T_0\nu_e=+\nu_e \tag{8.30}$$

を要請する必要がある（問題４）。(8.29)を(8.26)で表すと

$$\nu_+ = \frac{\nu_\mu - \nu_\tau}{\sqrt{2}}$$
$$\nu_- = \frac{\nu_\mu + \nu_\tau}{\sqrt{2}} \tag{8.31}$$

となる（問題５）。(8.31)を用いて、(8.25)を書き換え

$$-\mathcal{L}_{majorana\ mass} = \frac{1}{2}\left[a\nu_e^T\nu_e + \sqrt{2}b\left(\nu_e^T\nu_+ + \nu_+^T\nu_e\right) + d\left(\nu_-^T\nu_- + \nu_+^T\nu_+\right) + e\left(\nu_-^T\nu_- - \nu_+^T\nu_+\right)\right] \tag{8.32}$$

を得る（問題６）。また、ニュートリノは

$$\nu_1 = \cos\theta_{12}\nu_e - \sin\theta_{12}\nu_+$$
$$\nu_2 = \sin\theta_{12}\nu_e + \cos\theta_{12}\nu_+$$
$$\nu_3 = \nu_-$$

になる。

(8.29)の性質を用いると、

- μ-τ （置換）対称性を破らない量は、$\nu_e^T\nu_e$, $\nu_e^T\nu_+ + \nu_+^T\nu_e$, $\nu_+^T\nu_+$, $\nu_-^T\nu_-$
- μ-τ （置換）対称性を破る量は、$\nu_e^T\nu_- + \nu_-^T\nu_e$, $\nu_-^T\nu_+ + \nu_+^T\nu_-$

であることが分かる（問題７）。

以上から、実験事実の

$$\sin^2\theta_{23} = 0.5,\ \sin^2\theta_{13} = 0 \tag{8.33}$$

を自動的に導き出す理論の要請は

ニュートリノ振動における μ-τ （置換）対称性 (8.34)

である。従って、

- 未知のニュートリノ理論は、μ-τ （置換）対称性に対する不変性を持つはず

であると結論できる。

ニュートリノ質量項と混合角

ニュートリノ振動は、フレーバーニュートリノが(8.23)の質量を持つとき、観測値を再現する混合角、$\sin\theta_{23} = \pm 1/\sqrt{2}$, $\sin\theta_{13} = 0$ を予言する。ところで、残りの混合角 $\sin\theta_{12}$ は予言されない。この角度は(8.23)の質量から計算できるので、この節では

- μ-τ （置換）対称性を仮定し、混合角 $\sin\theta_{23}$, $\sin\theta_{13}$ 及び $\sin\theta_{12}$ の計算

を実行する。(8.23)の質量行列は対称行列なので、(8.9)のように直交行列で対角化できる。直交行列は(8.23)の固有ベクトルを用いて作ることができる。そこで、(8.23)の代わりに

$$M_{\text{weak}} = \begin{pmatrix} a & b & -\sigma b \\ b & d & e \\ -\sigma b & e & d \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

とする。一般に、(8.35)の固有値$\lambda_{1,2,3}$に対する固有ベクトルを$|1,2,3\rangle$とすると、

$$U_{PMNS}=\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right) \tag{8.36}$$

で表わすことができる（問題８）。固有値と固有ベクトルを求めると、

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1=\frac{a+d-\sigma e-\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2}\\&|1\rangle=N_1\begin{pmatrix}-x_-\\-1\\\sigma\end{pmatrix}\ \text{with}\ x_-=\frac{a-d+\sigma e-\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2b}<0\\&N_1^{-1}=\sqrt{2+(x_-)^2}\end{aligned}} \tag{8.37}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_2=\frac{a+d-\sigma e+\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2}\\&|2\rangle=N_2\begin{pmatrix}x_+\\1\\-\sigma\end{pmatrix}\ \text{with}\ x_+=\frac{a-d+\sigma e+\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2b}>0\\&N_2^{-1}=\sqrt{2+(x_+)^2}\end{aligned}} \tag{8.38}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_3=d+\sigma e\\&|3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\\sigma\\1\end{pmatrix}\end{aligned}} \tag{8.39}$$

になる（問題９）。ここに、$N_{1,2}$は係数で$\langle 1|1\rangle=1$及び$\langle 2|2\rangle=1$になるように決められる。

さて、(8.37)～(8.39)を用いて

- $m_1=\lambda_1,\ m_2=\lambda_2,\ m_3=\lambda_3$を仮定する　(8.40)

と$\left(|\nu_1\rangle,|\nu_2\rangle,|\nu_3\rangle\right)=\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right)$なので

$$\boxed{U_{PMNS}=\left(|\nu_1\rangle,|\nu_2\rangle,|\nu_3\rangle\right)} \tag{8.41}$$

より

$$U_{PMNS}=\left(|\nu_1\rangle,|\nu_2\rangle,|\nu_3\rangle\right)=\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right)=\begin{pmatrix}-x_-N_1 & x_+N_2 & 0\\ -N_1 & N_2 & \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\\ \sigma N_1 & -\sigma N_2 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\ \begin{cases}N_1^{-1}=\sqrt{2+(x_-)^2}\\N_2^{-1}=\sqrt{2+(x_+)^2}\end{cases} \tag{8.42}$$

とわかる（$-x_{-}>0$ に注意せよ）。(8.4)と比較して、

$$
\cos\theta_{12}=-x_{-}N_1=\sqrt{2}N_2,\ \sin\theta_{12}=x_{+}N_2=\sqrt{2}N_1
$$
$$
\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta_{23}=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta_{23}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\\ \cos\theta_{13}=1,\ \sin\theta_{13}=0\end{array}} \tag{8.43}
$$

を得る（問題１０）。以上から、

$$
\cos\theta_{12}=\frac{-x_{-}}{\sqrt{2+(x_{-})^2}}=\sqrt{\frac{2}{2+(x_{+})^2}},\ \sin\theta_{12}=\frac{x_{+}}{\sqrt{2+(x_{+})^2}}=\sqrt{\frac{2}{2+(x_{-})^2}} \tag{8.44}
$$

を得る。また、

$$
2+(x_{\pm})^2=\pm x_{\pm}\frac{\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{b} \tag{8.45}
$$

に注意して、(8.44)を用いると

$$
\boxed{\sin 2\theta_{12}=\frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}} \tag{8.46}
$$

を得る（問題１１）。これが、$\sin\theta_{12}$ の予言を与える（問題１２）。ここで、ニュートリノ振動の大まかな性質として、(8.14)の代わりに

$$
\begin{aligned}
&\sin^2\theta_{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\theta_{12}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\sin^2\theta_{23}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta_{23}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\sin^2\theta_{13}=0\Rightarrow\sin\theta_{13}=0
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

とするとき、

$$
b^2=(a-d+\sigma e)^2 \tag{8.48}
$$

である（問題１３）。以上から

$$
\begin{aligned}
m_1&=\frac{a+d-\sigma e-\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2}\\
m_2&=\frac{a+d-\sigma e+\sqrt{(a-d+\sigma e)^2+8b^2}}{2}\\
m_3&=d+\sigma e
\end{aligned} \tag{8.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin 2\theta_{12} = \frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2}} \\
&\cos\theta_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta_{23} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\
&\cos\theta_{13} = 1,\ \sin\theta_{13} = 0
\end{aligned}
\tag{8.50}
$$

が予言できる。

ニュートリノ質量階層

ニュートリノの質量への制限(8.16)を課してみると、質量パラメーターa,b,d,eに制限がつく。まず、

【１】太陽ニュートリノの$\Delta m_\odot^2$：

$$
\Delta m_\odot^2 \approx \left(a+d-\sigma e\right)\sqrt{\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2} \tag{8.51}
$$

より

$$
\boxed{a+d>\sigma e} \tag{8.52}
$$

の条件がつく。

【２】大気ニュートリノのΔm_{atm}^2は、質量のパターンによる。

《A》順質量階層（Normal mass hierarchy）の時には、$m_1^2 < m_2^2 << m_3^2$なので

$$
\Delta m_{atm}^2 = m_3^2 - m_1^2 \approx m_3^2 \approx \left(d+\sigma e\right)^2 \tag{8.53}
$$

を得る。ここで、$\left|\Delta m_{atm}^2\right| = \Delta m_{atm}^2 >> \Delta m_\odot^2$を満たすためには

$$
\boxed{\begin{aligned}&a+d-\sigma e\approx 0\ \text{ and/or } a-d+\sigma e\approx 0\ \&\ b\approx 0\\ &d+\sigma e\neq 0\end{aligned}} \tag{8.54}
$$

が必要になる。これに$m_1^2 < m_2^2 << m_3^2$の条件を用いると、

$$
\left|d+\sigma e\right| >> \left|a\right|,\left|b\right|,\left|d-\sigma e\right| \tag{8.55}
$$

になる（問題１４）。従って、

$$
d \approx \sigma e \tag{8.56}
$$

が分かる。そこで、小ささを示すパラメータとして

$$
\left|\varepsilon_{1,2,3}\right| << 1 \tag{8.57}
$$

とすると、(8.54)と(8.55)を満たすように

$$d+\sigma e=2m_0$$
$$a=\varepsilon_1 m_0,\ b=\varepsilon_2 m_0,\ d-\sigma e=2\varepsilon_3 m_0 \tag{8.58}$$

と設定できる。これを用いれば、(8.21)は

$$M_{\text{normal}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & 1+\varepsilon_3 & \sigma\left(1-\varepsilon_3\right)\\ -\sigma\varepsilon_2 & \sigma\left(1-\varepsilon_3\right) & 1+\varepsilon_3\end{pmatrix}m_0=\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&\sigma\\0&\sigma&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & -\sigma\varepsilon_3\\ -\sigma\varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_3 & \varepsilon_3\end{pmatrix}\right]m_0 \tag{8.59}$$

と与えられる。これから、

$$m_1=\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_3-\sqrt{\left(\varepsilon_1-2\varepsilon_3\right)^2+8\varepsilon_2^2}}{2}m_0,\ m_2=\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_3+\sqrt{\left(\varepsilon_1-2\varepsilon_3\right)^2+8\varepsilon_2^2}}{2}m_0,\ m_3=m_0 \tag{8.60}$$

$$\sin 2\theta_{12}=\frac{2\sqrt{2}\varepsilon_2}{\sqrt{\left(\varepsilon_1-2\varepsilon_3\right)^2+8\varepsilon_2^2}} \tag{8.61}$$

を得る（問題１５）。

《B》逆質量階層（Inverted mass hierarchy）の時には、$m_3^2<<m_1^2<m_2^2$ なので

$$\begin{aligned}\left|\Delta m_{atm}^2\right|&=\left|m_3^2-m_1^2\right|\approx m_1^2\\ &=\frac{1}{4}\left(\left(a+d-\sigma e\right)^2+\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2\right)-\frac{1}{2}\left(a+d-\sigma e\right)\sqrt{\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2}\\ &=\frac{1}{2}\left(a^2+\left(d-\sigma e\right)^2+4b^2\right)-\frac{1}{2}\left(a+d-\sigma e\right)\sqrt{\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2}\end{aligned} \tag{8.62}$$

を得る。第２項は無視できる（問題１６―A）ので、

$$\left|\Delta m_{atm}^2\right|\approx\frac{1}{2}\left(a^2+\left(d-\sigma e\right)^2+4b^2\right) \tag{8.63}$$

を得る。更に、$m_3^2<<m_1^2\left(\sim m_2^2\right)$ より

$$d+\sigma e\approx 0 \tag{8.64}$$

がわかる。実際には、(8.63)は

$$\left|\Delta m_{atm}^2\right|\approx\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a+d-\sigma e\right)^2 \text{ and } \left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2\approx 0\\ \frac{1}{2}\left[\left(a-d+\sigma e\right)^2+4b^2\right] \text{ and } \left(a+d-\sigma e\right)^2\approx 0\end{cases} \tag{8.65}$$

の２通りの場合があることが分かる（問題１６―B）。ところで、$\sin 2\theta_{12}=\mathcal{O}(1)$ に注意すると、

- $\left(a-d+\sigma e\right)^2+8b^2\approx 0$ の場合には、$b\approx 0$ (8.66)

- $(a+d-\sigma e)^2 \approx 0$ の場合には、$b \neq 0$ (8.67)

が導かれる（問題１６―C）。以上から、(8.57)と同様な手法を用いて

$$M_{\text{inverted-1}} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 1 & -\sigma(1-\varepsilon_3) \\ -\sigma\varepsilon_2 & -\sigma(1-\varepsilon_3) & 1 \end{pmatrix} m_0 \tag{8.68}$$

これより

$$m_1 = \left(2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2 + 8\varepsilon_2^2}}{2}\right) m_0,\ m_2 = \left(2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2 + 8\varepsilon_2^2}}{2}\right) m_0$$

$$m_3 = \varepsilon_3 m_0$$

$$\sin 2\theta_{12} = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon_2}{\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2 + 8\varepsilon_2^2}} \tag{8.69}$$

を得る。また、

$$M_{\text{inverted-2}} = \begin{pmatrix} -2+\varepsilon_1 & q & -\sigma q \\ q & 1 & -\sigma(1-\varepsilon_3) \\ -\sigma q & -\sigma(1-\varepsilon_3) & 1 \end{pmatrix} m_0 \tag{8.70}$$

と与えられ、

$$m_1 = \left(-\frac{\sqrt{(4-\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2 + 8q^2}}{2} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right) m_0 \approx \left(-\sqrt{4+2q^2} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3}{\sqrt{4+2q^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right) m_0 \,(<0)$$

$$m_2 = \left(\frac{\sqrt{(4-\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2 + 8q^2}}{2} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right) m_0 \approx \left(\sqrt{4+2q^2} - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3}{\sqrt{4+2q^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right) m_0 \,(>0)$$

$$m_3 = \varepsilon_3 m_0$$

$$\sin 2\theta_{12} = \frac{2\sqrt{2}q}{\sqrt{(4-\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2 + 8q^2}} \approx \frac{q}{\sqrt{2+q^2}} \tag{8.71}$$

を得る（問題１７）。

《C》縮退質量型（Degenerate mass pattern）の時には、$m_2^2 - m_1^2,\ \left|m_3^2 - m_1^2\right| << m_1^2 \sim m_2^2 \sim m_3^2$ なので、３つの質量がほぼ $m_0 > 0$ とすると

$$|m_1| = m_0,\ |m_2| = m_0 + \varepsilon_\odot m_0,\ |m_3| = m_0 + \varepsilon_{atm} m_0 \quad \left(\left|\varepsilon_{\odot,atm}\right| << 1\right) \tag{8.72}$$

と置くとよい。ここで、

- ニュートリノ質量は±の符号が許される

ことを考慮して、絶対値がついている。その時、

$$\Delta m_\odot^2 = m_2^2 - m_1^2 = \left(1+\eta_\odot\right)^2 m_0^2 - m_0^2 \overset{|\varepsilon_\odot|<<1}{\approx} 2m_0^2\varepsilon_\odot$$
$$\Delta m_{atm}^2 = m_3^2 - m_1^2 = \left(1+\eta_{atm}\right)^2 m_0^2 - m_0^2 \overset{|\varepsilon_{atm}|<<1}{\approx} 2m_0^2\varepsilon_{atm} \tag{8.73}$$

であるので、$\Delta m_\odot^2 \big/ \left|\Delta m_{atm}^2\right| << 1$より

$$\frac{\varepsilon_\odot}{|\varepsilon_{atm}|} << 1 \Rightarrow \varepsilon_\odot \approx 0 \text{と考えてよい} \tag{8.74}$$

がわかる。

さて、$m_1 \approx m_2 \approx m_3 \left(>0\right)$の場合には、(8.72)は

$$m_1 = m_0,\ m_2 = m_0 + \varepsilon_\odot m_0,\ m_3 = m_0 + \varepsilon_{atm} m_0 \tag{8.75}$$

なので、

$$\varepsilon_\odot m_0 = \sqrt{\left(a-d+\sigma e\right)^2 + 8b^2} \tag{8.76}$$

$$\varepsilon_{atm} m_0 = d + \sigma e - \frac{a+d-\sigma e - \varepsilon_\odot m_0}{2}\left(\approx d+\sigma e - \frac{a+d-\sigma e}{2}\right) \tag{8.77}$$

である。以上から、(8.76)は、(8.50)より（簡単のため$a-d+\sigma e>,\ b>0$とする）

$$a-d+\sigma e = \varepsilon_\odot m_0 \cos 2\theta_{12},\ 2\sqrt{2}b \approx \varepsilon_\odot m_0 \sin 2\theta_{12} \tag{8.78}$$

また、(8.77)より

$$\varepsilon_{atm} m_0 = 2\sigma e - \frac{1-\cos 2\theta_{12}}{2}\varepsilon_\odot m_0 \approx 2\sigma e \tag{8.79}$$

である。例として

$$M_{\text{degenarate-1}} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\varepsilon_{atm} + \varepsilon_\odot \cos 2\theta_{12} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon_\odot \sin 2\theta_{12} & -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\varepsilon_\odot \sin 2\theta_{12} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon_\odot \sin 2\theta_{12} & 1 & \frac{\sigma}{2}\varepsilon_{atm} \\ -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\varepsilon_\odot \sin 2\theta_{12} & \frac{\sigma}{2}\varepsilon_{atm} & 1 \end{pmatrix} m_0 \tag{8.80}$$

と与えることができ、

$$m_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon_{atm} - \varepsilon_\odot \cos 2\theta_{12} - \varepsilon_\odot}{2}\right) m_0,\ m_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon_{atm} - \varepsilon_\odot \cos 2\theta_{12} + \varepsilon_\odot}{2}\right) m_0$$
$$m_3 = \left(1 + \frac{\varepsilon_{atm}}{2}\right) m_0 \tag{8.81}$$

を得る（問題１８）。

実験の特徴を､このように整理することであらたなニュートリノ理論を考える道筋が得られる。例えば、順質量階層の場合には、(8.59)より

- 第０近似：$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & \sigma & 1 \end{pmatrix} m_0$ を与えるモデルを考える。

- 第１近似：ごく僅かな影響を与える相互作用を考案し $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & -\sigma\varepsilon_3 \\ -\sigma\varepsilon_2 & -\sigma\varepsilon_3 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} m_0$ を導く。

が生まれる。特に、第０近似の場合には

$$\left|1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{with } m_1 = 0,\ \left|2\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{with } m_1 = 0,\ \left|3\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sigma \end{pmatrix} \ \text{with } m_1 = 2m_0 \tag{8.82}$$

であり、(8.11)と(8.41)を用いて、明らかに

$$\Delta m_{atm}^2 >> \Delta m_{\odot}^2 \left(=0\right),\ \ \sin\theta_{23} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}},\ \ \sin\theta_{12} = \sin\theta_{13} = 0 \tag{8.83}$$

が成り立つ。従って、「$\sin\theta_{12}$ は第１近似から与えられる」、つまり

- 第１近似の質量行列が $\sin\theta_{12}$ を決定する (8.84)

ことがわかる。他の場合も同様である（問題１９）。

第八章問題

０）(8.4)のようにU_{PMNS}がニュートリノの混合行列のみで表わされるには、重要な仮定が荷電レプトンになされているが、その重要な仮定とは何かを説明せよ。

１）(8.9)を導き、U_{PMNS}は直交行列であることを示せ。

２）(8.22)を導け。

３）A）(8.24)を導け。

　B）(8.25)を導け。

４）ν_eに対して(8.30)を要請する理由を述べよ。

５）(8.31)を導け

６）(8.32)を導け

７）$\nu_e^T\nu_- + \nu_-^T\nu_e,\ \nu_-^T\nu_+ + \nu_+^T\nu_-$が$\mu$-$\tau$（置換）対称性を破る量であることを説明せよ。

８）(8.36)を証明せよ。

９）A）固有値と固有ベクトル(8.37)～(8.39)を求めよ。

　B）$|1\rangle$と$|2\rangle$が直交していることを示せ。

　C）$Tr\left(M_{\text{weak}}\right) = Tr\left(M_{\text{mass}}\right)$が成立していることを示せ。

１０）A）(8.43)を求めよ。

　B）$-x_- N_1 = \sqrt{2}N_2$及び$x_+ N_2 = \sqrt{2}N_1$を証明せよ。【ヒント】$x_- < 0,\ x_+ > 0$に注意する

１１）A）(8.45)を求めよ。

　B）(8.46)を求めよ。

１２）(8.40)ではなく$m_1 = \lambda_1,\ m_2 = \lambda_3,\ m_3 = \lambda_2$の時、つまり$\left(|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle\right) = \left(|1\rangle, |3\rangle, |2\rangle\right)$の時、$\theta_{12,23,31}$を求めよ。【ヒント】この場合は、$\sin\theta_{13} = 0$を予言しない。

１３）(8.48)を導け。

１４）(8.55)を導け。

１５）(8.60)と(8.61)を導け。

１６）A）(8.62)に置いて何故第２項は無視できる理由を説明せよ。

　B）(8.65)の２通りになる理由を説明せよ。

　C）(8.66)と(8.67)を導け。

１７）(8.68)～(8.71)を導け。

１８）A）(8.80)と(8.81)を求めよ。

　B）(8.75)の$m_1 = m_0,\ m_2 = m_0 + \varepsilon_\odot m_0,\ m_3 = m_0 + \varepsilon_{atm} m_0$の代わりに、$m_1 = -m_0,\ m_2 = m_0 + \varepsilon_\odot m_0$, $m_3 = m_0 + \varepsilon_{atm} m_0$を用いた時に(8.80)と(8.81)に対応する結果を導け。

１９）A）逆質量階層（(8.68)と(8.70)）、縮退質量型（(8.80)）の場合に議論せよ。

Ｂ）それぞれについて、第０近似の場合での(8.82)に対応する固有値と固有ベクトルを求め（(8.49)と(8.50)を利用せずにもう一度計算すること）、(8.83)や(8.84)のようなニュートリノ混合の特徴を議論せよ。